Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Martin Rasmussen

Arbejdspapir*

18 april 1999

# Mængde- og effektivitetsindeks i nestede produktionsfunktioner

**Resumé:**

*I papiret diskuteres, hvordan man kan opstille nestede produktionsfunktioner til estimationsformål. Papiret er specielt tænkt i sammenhæng med estimation af energiefterspørgsel for erhverv, men meget af teksten gælder også i andre sammenhænge.*

*Teoretisk kan producentens problem opstilles i to trin, hvis produktionsfunktionen er seperabel. I mange praktiske sammenhænge er visse teoretiske variabler som man skal bruge ved en to-trinsopstilling af producentens problem ikke observerbare (fx en energiydelse). Det vises, at man kan erstatte disse variabler af temmelig vilkårlige aggregater (fx summen af joule over energiarter), og det alligevel går godt.*

*Det vises også, at når der i fordelingen af energi estimeres betinget på et mængdeindeks, så skal de tilhørende estimerede effektivitetsindeks opfattes som effektiviteter for individuelle energiarter i forhold til et aggregeret energieffektivitetsindeks. Endelig foreslås et bånd, som kan være praktisk at lægge på effektivitetsindeksene i estimationer.*

**Filnavn:** mar18499.msg

**Nøgleord:** Effektivitetsindeks, mængdeindeks, problemer i to-trins, nestede produktionsfunktioner, ikke-observerbare ydelser

# 1 Indledning

I papiret diskuteres, hvordan man kan opstille nestede produktionsfunktioner til estimationsformål. Papiret er specielt tænkt i sammenhæng med estimation af energiefterspørgsel for erhverv, men meget gælder også i andre sammenhænge.

I nestede produktionsfunktioner opstilles producentens problem typisk i to trin. I første trin finder producenten ud af, hvor meget han vil bruge af "aggregerede energiydelser" og andre faktorer, og i næste trin, hvordan den aggregerede energiydelse skal frembringes af forskellige energiarter. Det, der er smart ved nestede produktionsfunktioner, er, at fordelingen af den aggregerede energiydelse på energiarter kan ske uden at tænke over andet end lige netop energien – fx ikke på arbejdskraft og kapital. En ulempe er, at energiydelsen i virksomheden generelt ikke kan måles præcist. Man kan måle fx den totale joulemængde eller et økonomisk indeks, men det er og bliver kun approksimationer.

Det er velkendt, at opstillingen af producentens problem i to trin er "tilladt", når man kan observere den faktiske ydelse og tilhørende omkostninger for en enhed energiydelse. Med tilladt menes, at løsningen til to-trins problemet giver det samme som løsningen til det generelle et-trins problem. I afsnit 2.2 vises, at opstillingen i to trin faktisk er tilladt selv med meget forskellige måder at approksimere energiydelsen, dvs. ved meget forskellige valg af mængdeindeks for energien. Det er ikke så overraskende, men alligevel vist, så man er helt sikker. I afsnit 2.1 vises, at når der i fordelingen af af energi estimeres betinget på et mængdeindeks, så skal de tilhørende estimerede effektivitetsindeks opfattes som effektiviteter for individuelle energiarter i forhold til et aggregeret energieffektivitetsindeks.

I tredje afsnit foreslås et bånd, som kan være praktisk at lægge på effektivitetsindeksene i estimationer.

# 2 Opstilling af producentens problem i to trin og opfattelsen af effektivitetsindeks

Lad $f$ og $g$ være to produktionsfunktioner, der er homogene af første grad og stigende i deres argumenter.

En producent har problemet

*Problem 1*:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\,e_1,e_2,\ldots,e_n,x}\; & C = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i + p_x x \\ \text{s.t.}\quad & y = f\left(g\left(e_1 d_1, e_2 d_2, \ldots, e_n d_n\right), x d_x\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Vi kan opskrive problemet i to trin. Til det formål lader vi $E_d$ være den sande energiydelse, altså værdien af funktionen $g$. Prisen for $E_d$ er $P_{Ed}$, og den præciseres nedenfor. Problemet opskrevet i to trin er så

*Problem 2a*:

$$\begin{array}{rl} \text{Min }_{E_d,x} & C = P_{Ed}E_d + p_x x \\ \text{s.t.} & y = f\left(E_d, xd_x\right) \end{array}$$

Andet trin er

*Problem 2b*:

$$\begin{array}{rl} \text{Min }_{e_1,e_2,\ldots,e_n} & C_e = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i \\ \text{s.t.} & E_d = g\left(e_1 d_1, e_2 d_2, \ldots, e_n d_n\right) \end{array}$$

Meningen med at skrive problemet i to trin, er at forenkle problem 1. Forenklingen består i, at problem 2a løses *givet* en aggregeret pris og problem 2b *givet* en aggregeret mængde. Men hvis to-trins problemet skal relateres fornuftigt til problem 1, skal disse aggregater vælges fornuftigt, nemlig som (hvor $e, p_e, d$ er vektorer af energi, energipriser og energieffektiviteter)

$$\begin{aligned} P_{Ed} &= \frac{p_e e^0}{g(e^0, d)} \\ E_d \text{ i 2b} &= \text{Løsning fra 2a} \end{aligned} \tag{2}$$

hvor $e^0$ er løsning til problem 2b.

Når man analyserer de to delproblemer, skal man altså ikke tænke over, hvorfra hhv. mængde- og prisaggregater kommer, men blot tage dem for givet. Men hvis problem 1 og 2 skal have samme løsning skal relationen i (2) med. Vi kan så definere en løsning til problem 2 som $x^0, E_d^0, e^0$, hvor $x^0, E_d^0$ løser 2a givet $P_{Ed}^0 = \frac{p_e e^0}{g(e^0,d)}$, og $e^0$ løser 2b givet $E_d^0$.

I appendiks vises i et mere generelt tilfælde, at problem 1 og 2 har samme løsning.

Til praktiske estimationsformål er denne to-trinsopstilling imidlertid ikke nogen hjælp, for ydelsen $E_d$ er ikke observerbar. Den skal udtrykke værdien i produktionen af de forskellige energiarter. Danner man imidlertid et mængdeindeks, et prisindeks og et effektivitetsindeks, kan man opstille et brugbart to-trinsproblem. En naturlig måde at danne et mængdeindeks er:

- Mængdeindekset $E$ er en funktion af $e_i$'erne, som er homogen af første grad,

$$E = E(e_1, \ldots, e_n) \tag{3}$$

Når man har valgt en eller anden måde at danne mængdeindekset på, som opfylder dette, følger pris- og effektivitetsindekset som

- Prisindekset $P_E$ defineres som

$$P_E = \frac{p_e e}{E(e)} \tag{4}$$

  hvor $e$ og $p_e$ er vektorer for input og tilhørende priser. Denne måde at aflede prisindekset, når mængdeindekset er givet, sikrer, at prisindeks gange mængdeindeks giver værdien.

- Effektivitetsindekset $D_e$ defineres (ideelt set) som

$$D_e = \frac{g(e,d)}{E(e)} \tag{5}$$

  hvor $d$ er vektor for effektivitetsindeks hørende til $e$. Det afledte indeks sikrer, at mængdeindeks gange effektivitetsindeks giver den samlede ydelse.

Effektivitetsindekset kan ikke observeres.

Vi kan så skrive problemet i to trin. Første trin er

*Problem 3a*:

$$\begin{array}{ll} \text{Min }_{E,x} & C = P_E E + p_x x \\ \text{s.t.} & y = f\left(ED_e, x d_x\right) \end{array} \tag{6}$$

mens andet trin er

*Problem 3b*:

$$\begin{array}{ll} \text{Min }_{e_1,e_2,\ldots,e_n} & C_e = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i \\ \text{s.t.} & ED_e = g\left(e_1 d_1, e_2 d_2, \ldots, e_n d_n\right) \end{array} \tag{7}$$

## 2.1 Tolkning af effektivitetsindeks

I (1) vælger producenten en kombination af produktionsfaktorer, $e_1, \ldots, e_n, x$, som minimerer omkostningerne, $C$, ved at producere mængden $y$. I (6) vælges den kombination af aggregatet $E$ og $x$, som minimerer omkostningerne. I (7) vælges, hvordan aggregatet $E$ sammensættes af $e_i$'erne.

I (7) betinges her på ydelsen $ED_e$, som ikke direkte kan observeres. Imidlertid kan bibetingelsen i (7) omskrives ved udnyttelse af, at $g$ er homogen af første grad

$$E \cdot D_e = g\left(e_1 d_1, e_2 d_2, \ldots, e_n d_n\right) \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned} E &= g\left(e_1\frac{d_1}{D_e}, e_2\frac{d_2}{D_e}, \ldots, e_n\frac{d_n}{D_e}\right) \\ &= g\left(e_1\delta_1, e_2\delta_2, \ldots, e_n\delta_n\right) \qquad \text{hvor } \delta_i = \frac{d_i}{D_e} \end{aligned}$$

Når $C_e$ minimeres betinget på den observerbare $E$, skal de relevante trender, $\delta_i$'erne, altså tolkes som afvigelser fra en aggregeret trend. Dermed betinges implicit også på den aggregerede effetivitetstrend $D_e$. Imidlertid betyder det, at der skal lægges nogle restriktioner på $\delta_i$'erne, for da disse er afvigelser fra en slags gennemsnit, kan de eksempelvis ikke alle stige. Hvilken sammenhæng, der er mellem $\delta_i$'erne, diskuteres i afsnit 3 og 4.

## 2.2 Samme løsning til de to problemer

Giver de to problemer 1 og 3a, 3b nu den samme løsning? Ja, men det vises i appendiks. Vi definerer en løsning til problem 3 som $x^0, E^0, e^0$, hvor $E^0, x^0$ løser 3a givet $P_E$ og $p_x$ og effektiviteterne $D_e, d_x$, og $e^0$ løser 3b givet $p_e$, $d$ og $E^0$, og hvor den aggregerede energipris er fundet som i (4) med $e = e^0$. Man løser altså 3a og 3b givet aggregater for energiydelsespris, mængde og effektivitet, men uden at tænke over, at disse i virkeligheden ikke kan være hvad som helst.

# 3 Restriktioner på effektivitetsindeks

I afsnit 2.1 nævnte vi, at der skulle være nogle restriktioner på de relative effektivitetsindeks ($\delta_i$'erne). I dette afsnit foreslås disse at være $\Pi_i \delta_i^{w_i} = 1$, hvor $w_i$ er omkostningsandelen for energiart $i$, dvs. $w_i = \frac{p_i e_i}{p_e e}$. Begrundelsen er som følger:

Den teoretisk rigtige omkostningsfunktion for energien er (jf. problem 2b) er

$$\begin{aligned} C_e &= \min\{pe | g(e,d) = E_d\} \\ &= C_e(p_e, d, E_d) = pe^*(p_e, d, E_d) \end{aligned}$$

hvor funktionen $e^*$ løser til problemet.

Der gælder

- $C_e$ er homogen af 1. grad i $(\frac{p_1}{d_1}, \ldots, \frac{p_n}{d_n})$ (det ses let, hvis man opskriver problemets førsteordensbetingelser), og funktionen kan skrives $C_e(\frac{p_1}{d_1}, \ldots, \frac{p_n}{d_n}, E_d)$.
- Hvis funktionen $g$ er homogen af første grad, er $C_e$ homogen af første grad i $E_d$. Dvs. vi kan skrive $C_e = c_e(\frac{p_1}{d_1}, \ldots, \frac{p_n}{d_n})E_d$, hvor $c_e$ er omkostningerne pr. enhed ydelse (dvs. lig prisen $P_{Ed}$ i 2a).

Det teoretisk rigtige indeks for enhedsomkostningerne i tilfælde af konstant skalaafkast er således funktionen $c_e(\frac{p_1}{d_1}, \ldots, \frac{p_n}{d_n})$.[1]

Når ydelsen $E_d$ (= $g(e_1 d_1, \ldots, e_n d_n)$) ikke er målelig, må man til estimationsformål som nævnt gøre noget. Det, der stod i foregående afsnit, var, at man temmelig frit kunne finde på indeks for pris, mængde og effektivitet, som dog *teoretisk* burde opfylde

$$
\begin{aligned}
P_E E &= \text{samlede omkostninger} = p_e e \\
E \cdot D_E &= \text{ydelse} = E_d
\end{aligned}
\tag{9}
$$

I estimationsøjemed er det nok umuligt at tilfredsstille dette teoretiske krav i andre tilfælde end meget simple produktionsfunktioner. Imidlertid kan man foreslå ovennævnte bånd på effektiviteterne, der approksimerer et teoretisk rigtigt.

Da $E_d = g(e_1 d_1, \ldots, e_n d_n)$, og $g$ har konstant skalafkast, gælder, at den relative ændring i ydelsen findes som ("el" er elasticiteten og en prik over en variabel angiver relative ændringer)

$$\dot{E}_d = \sum_i \mathrm{el}(g, e_i d_i)(\dot{e}_i + \dot{d}_i)$$

Da vi teoretisk ønsker, at $E \cdot D_E = E_d$, kan vi kræve, at udviklingen i mængde- og effektivitetsindeks findes som

$$\dot{E} + \dot{D}_E = \sum_i \mathrm{el}(g, e_i d_i)(\dot{e}_i + \dot{d}_i)$$

og specielt, hvis faktorerne er konstante ($\dot{e} = 0$), at

$$\dot{D}_E = \sum_i \mathrm{el}(g, e_i d_i)\dot{d}_i \tag{10}$$

Om elasticiteten af $g$ mht. $e_i d_i$ gælder, at den er lig omkostningsandelen for den $i$'te faktor. Det gælder, fordi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{el}(g, e_i d_i) &= \frac{\partial g}{\partial(e_i d_i)} \frac{e_i d_i}{g} = g_i' d_i \frac{e_i}{g} && \text{hvor } g_i' = \frac{\partial g}{\partial(e_i d_i)} \\
&= \frac{\partial g}{\partial e_i} \frac{e_i}{g} && \text{da } \frac{\partial g}{\partial e_i} = g_i' \frac{\partial(e_i d_i)}{\partial e_i} = g_i' d_i \\
&= \frac{p_i}{c_e(\frac{p_1}{d_1}, \ldots, \frac{p_n}{d_n})} \frac{e_i}{g} && \text{da } \frac{\partial g}{\partial e_i} = \frac{p_i}{c_e} \text{ i producentoptimum} \\
&= \frac{p_i}{c_e} \frac{e_i}{E_d} = \frac{p_i e_i}{p_e e} && \text{da } c_e E_d = p_e e
\end{aligned}
\tag{11}
$$

[1] Eksempler: GLO: $c_e = \sum_i \sum_j \beta_{ij} (\frac{p_i}{d_i} \frac{p_j}{d_j})^{\frac{1}{2}}$, Cobb-Douglas: $c_e = \prod_i \left(\frac{p_i}{d_i}\right)^{\beta_i}$, CES: $c_e = \left(\sum_i \left(\frac{p_i}{d_i}\right)^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$, hvor $\varepsilon$ er substitutionselasticiteten, Leontief: $c_e = \sum_i \beta_i \frac{p_i}{d_i}$.

Omskrives (10) fås

$$0 = \sum_i \text{el}(g, e_i d_i)(\dot{d}_i - \dot{D}_E) = \sum_i w_i(\dot{d}_i - \dot{D}_E)$$

hvor $w_i$ er omkostningsandele. I ligningen står, at en teoretisk fornuftig restriktion på de relative effektiviteter, $\frac{d_i}{D_E} = \delta_i$, er, at ændringerne i disse sammenvejet med omkostningsandelen skal give nul. I estimationerne kan dette omtrentligt sikres fx ved funktionen $\Pi_i \left(\frac{d_i}{D_E}\right)^{w_i} = 1$.

# 4 Appendiks

I afsnittet vises, at man kan opsplitte problem 1 i to trin. Den slags gør man jo tit, så det man får ud af afsnittet er, at det rent faktisk er tilladeligt, ikke bare i et standardtilfælde med konstant skalaafkast og uden effektivitetsindeks, men også når der som i de foregående afsnit indgår effektivitetsindeks, og når der som i MAR 19/2-1999 indgår ikke-konstant skalafkast.

Det fremgår, at næsten vilkårlige aggregeringer af mængder er tilladelige. Det betyder selvfølgelig ikke, at alle aggregeringer er lige fornuftige empirisk set.

Beviset er lidt langt og omstændeligt, men en lille opmuntring kan være, at man får noget ud af det, nemlig en måde at skrive to-trinsproblemet, når der ikke er konstant skalafkast, som man måske ikke lige ville tænke på ved første øjekast.

Vi opstiller problem 1 igen.

*Problem 1*:

$$\begin{array}{ll} \text{Min }_{e,x} & C = p_e e + p_x x \\ \text{s.t.} & y = f\left(g\left(e,d\right), x d_x\right) \end{array}$$

Hvor $e, d, p_e$ er vektorer og $g\left(e,d\right) = g\left(e_1 d_1, e_2 d_2, \ldots, e_n d_n\right)$.

Vi antager i afsnittet, at

$$g(\lambda e, d) = \lambda^k g(e,d) \quad \text{dvs. } g \text{ er homogen af } k\text{'te grad.}$$

To-trinsproblemet opstiller vi som problem 3 ovenfor, dog med mulighed for ikke-konstant skalaafkast. Det vil sige

*Problem 3a*:

$$\begin{array}{ll} \text{Min }_{E,x} & C = P_E E^{1/k} + p_x x \\ \text{s.t.} & y = f\left(E D_E, x d_x\right) \end{array}$$

mens andet trin er

*Problem 3b*:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\ e}\, C_e &= p_e e \\ \text{s.t.} \qquad ED_E &= g\,(e,d) \end{aligned}$$

Sæt desuden:

Mængdeindekset $E$ er en funktion af $e$, der er homogen af første grad

$$E = E(e)$$

Prisindekset $P_E$ defineres som

$$P_E = \frac{p_e e}{(E(e))^{1/k}}$$

Effektivitetsindekset $D_E$ defineres som

$$D_E = \frac{g(e,d)}{E(e)}$$

En løsning til hele problem 3 er $e^0, x^0, P_E^0, E^0, D_E^0$, således at aggregaterne er værdien af aggreringsfunktionerne i $e^0$, og således at $e^0$ løser problem 3b givet $E^0, D_E^0$, og $E^0, x^0$ løser problem 3a givet $P_E^0$.

Vi ønsker at vise, at hvis $e^0, x^0$ løser problem 1 så løser $e^0, x^0, P_E^0, E^0, D_E^0$ problem 3, og omvendt, hvis $e^0, x^0, P_E^0, E^0, D_E^0$ løser problem 3, så løser $e^0, x^0$ problem 1.

Vi begynder med to små hjælperesultater

**R1)** Antag $e^0$ løser problem 3b givet $ED_E$, og at $e^1$ løser problemet givet $\lambda(ED_E)$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. Da $g$ er homogen af $k$'te grad kan $ED_E$ produceres med $\frac{1}{\lambda}^{1/k} e^1$, og $\lambda(ED_E)$ kan produceres med $\lambda^{1/k} e^0$. Da $e^0$ er optimal relativt til $ED_E$, gælder $p_e \frac{1}{\lambda}^{1/k} e^1 \geq p_e e^0$. Da $e^1$ er optimal givet $\lambda(ED_E)$ gælder $p_e e^1 \leq p_e \lambda^{1/k} e^0$. Derfor må lighedstegnet gælde i de to uligheder. (Hvis yderligere $g$ er strengt quasi-konkav, er der altid kun en løsning til problem 3b, og så må $e^1 = \lambda^{1/k} e^0$.)

**R2)** Hvis $e^0, x^0$ løser problem 1, så gælder det oplagt, at $e^0$ løser problem 3b givet $E = E(e^0)$ og $D_E^0 = g(e^0, d)/E(e^0)$. (Ellers ville man kunne reducere energiomkostningerne.)

**"En løsning til problem 1 er en løsning til problem 3"**: Lad $e^0, x^0$ løse problem 1. Sæt

$$\begin{aligned} E^0 &= E(e^0) \\ P_E^0 &= \frac{p_e e^0}{E(e^0)^{1/k}} \\ D_E^0 &= \frac{g(e^0, d)}{E(e^0)} \end{aligned}$$

På grund af **R2)** løser $e^0$ problem 3b relativt til $E^0$.

Med hensyn til problem 3a skal vises, at $E^0, x^0$ løser problemet relativt til $P_E^0$ og $D_E^0$. Vi gør det ved et modstridsbevis, og antager, at der findes $E^1, x^1$, så

$$f(E^1 D_E^0, x^1) = f(E^0 D_E^0, x^0)$$

og

$$P_E^0 \left(E^1\right)^{1/k} + p_x x^1 < P_E^0 \left(E^0\right)^{1/k} + p_x x^0 = p_e e^0 + p_x x^0 \qquad (12)$$

Vi definerer først $e^1$ som en "disaggregering" af $E^1$, der opfylder

$$e^1 \text{ løser problem 3b givet } E^1,\ D_E^0 \quad (\text{så } E^1 D_E^0 = g(e^1, d)) \qquad (13)$$

Sæt

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{E^1 D_E^0}{E^0 D_E^0} &= \frac{g(e^1, d)}{g(e^0, d)} \\ &\Leftrightarrow \\ g(e^0, d) = \frac{1}{\lambda} g(e^1, d) &= g(\frac{1}{\lambda}^{1/k} e^1, d) \\ &\Leftrightarrow \\ g(e^1, d) = \lambda g(e^0, d) &= g(\lambda^{1/k} e^0, d) \end{aligned} \qquad (14)$$

På grund af **R2)** og (13) gælder nu

$$\begin{aligned} p_e e^0 &= p_e \frac{1}{\lambda}^{1/k} e^1 \\ &\Leftrightarrow \\ p_e \lambda^{1/k} e^0 &= p_e e^1 \end{aligned}$$

Vi har nu

$$\begin{aligned} p_e e^0 + p_x x^0 &> P_E^0 \left(E^1\right)^{1/k} + p_x x^1 \qquad \text{pga. (12)} \\ &= \frac{p_e e^0}{E(e^0)^{1/k}} E(e^1)^{1/k} + p_x x^1 \\ &= \frac{p_e e^0}{(\frac{1}{\lambda} E^1)^{1/k}} \left(E^1\right)^{1/k} + p_x x^1 \\ &= \frac{p_e \frac{1}{\lambda}^{1/k} e^1}{(\frac{1}{\lambda} E^1)^{1/k}} \left(E^1\right)^{1/k} + p_x x^1 \qquad \text{pga. (14)} \\ &= p_e e^1 + p_x x^1 \end{aligned}$$

Men dette er i modstrid med, at $e^0, x^0$ løser problem 1, for der gælder, at $y$ kan produceres med $e^1, x^1$, idet $y = f(E^1 D_E^0, x^1) = f(g(e^1, d), x^1)$.

**"En løsning til problem 3 er en løsning til problem 1":** Lad nu omvendt $e^0, x^0, P_E^0, E^0, D_e^0$ løse problem 3. Vi skal vise, at $e^0, x^0$ løser problem 1.

Antag modsat, at $e^0, x^0$ ikke løser problem 1, så der findes et bundt $e^1, x^1$ med

$$\begin{aligned} p_e e^1 + p_x x^1 &< p_e e^0 + p_x x^0 \quad \text{og} \\ f(g(e^1, d), x^1) &= f(g(e^0, d), x^0) \quad (= y) \end{aligned} \tag{15}$$

Vi sætter

$$\begin{aligned} E^1 &= E(e^1) \\ P_E^1 &= p_e e^1 / E(e^1)^{1/k} \\ D_E^1 &= g(e^1, d)/E(e^1) \end{aligned}$$

Siden $e^1, x^1$ løser problem 1 gælder ifølge første del af sætningen, at $E^1$ løser 3a relativt til $P_E^1, D_E^1, p_x$. Vi ønsker at vise, at der ikke samtidig kan gælde, at $E^1$ løser 3a relativt til $P_E^1, D_E^1, p_x$, og $E^0$ løser 3a relativt til $P_E^0, D_E^0, p_x$.

Sæt først

$$\lambda = \frac{E^1 D_E^1}{E^0 D_E^0} = \frac{g(e^1, x^1)}{g(e^0, x^0)}$$

Vi kan bruge **R2** til at finde (vi antager her at $g$ er strengt quasi-konkav – det er egentlig ikke nødvendigt, men "sparer lidt kridt")

$$\begin{aligned} e^1 &= \lambda^{1/k} e^0 \\ p_e e^1 &= p_e \lambda^{1/k} e^0 \end{aligned}$$

Vi har så

$$\begin{aligned} E^1 &= E(e^1) = E(\lambda^{1/k} e^0) = \lambda^{1/k} E(e^0) = \lambda^{1/k} E^0 \\ P_E^1 &= \frac{p_e e^1}{(E^1)^{1/k}} = \frac{p_e \lambda^{1/k} e^0}{(\lambda^{1/k} E^0)^{1/k}} = \frac{p_e e^0}{\lambda^{1/k} (E^0)^{1/k}} = \frac{1}{\lambda^{1/k}} P_E^0 \\ D_E^1 &= \frac{g(e^1, d)}{E^1} = \frac{g(\lambda^{1/k} e^0, d)}{\lambda^{1/k} E^0} = \frac{\lambda g(e^0, d)}{\lambda^{1/k} E^0} = \frac{\lambda}{\lambda^{1/k}} D_E^0 \end{aligned}$$

Vi har også $f(E^1 D_E^1, x^1) = f(E^0 D_E^0, x^0)$, så vi kan skrive

$$f(E^0 D_E^0, x^0) = f(E^1 D_E^1, x^1) = f(\lambda^{1/k} E^0 \frac{\lambda}{\lambda^{1/k}} D_E^0, x^1) = f(E^0 \lambda D_E^0, x^1)$$

Da $E^0, x^0$ er løsning til problem 3a relativt til $P_E^0, D_E^0, p_x$ gælder

$$P_E^0 (E^0 \lambda)^{1/k} + p_x x^1 \geq P_E^0 (E^0)^{1/k} + p_x x^0$$

Ydermere husker vi, at vi har påstået $p_e e^1 + p_x x^1 < p_e e^0 + p_x x^0$ og $p_e e^1 = p_e \lambda^{1/k} e^0$. Vi får nu

$$\begin{aligned} p_e e^1 + p_x x^1 &< p_e e^0 + p_x x^0 = P_E^0 (E^0)^{1/k} + p_x x^0 \\ &\leq P_E^0 (E^0 \lambda)^{1/k} + p_x x^1 = p_e e^0 \lambda^{1/k} + p_x x^1 = p_e e^1 + p_x x^1 \end{aligned}$$

en modstrid.

At problem 1 og problem 2 har samme løsninger kan fås som specialtilfælde af ovenstående ved valg af energiaggrgeringsfunktion $E = E_d = g(e, d)$ og effektivitetsindeks $D = 1$. I så fald er problem 3 og 2 nemlig helt ens.