

STRUKTUREL MAKROØKONOMI

NETVÆRKSTEORI
OG INPUT-OUTPUT

J. Asger Olsen

*Danmark
1985*

FORORD

Denne rapport er resultat af et forskningsprojekt, udført i Modelgruppen, Danmarks Statistik i perioden juli 1983 til juli 1984 for Statens Samfundsvidenskabelige Forskningsråd.

Rapportens hovedemne er makroøkonomiske anvendelser af netværksteori. Det påvises bl.a. at de almindeligt anvendte input-output modeller er varianter af den type netværksmodeller, der bruges intensivt i fx elektricitetslære og operationsanalyse. Rapportens resultater bekræfter, at netværksteorien er en velegnet teoretisk referenceramme for analyser af diverse former for empirisk forekommende "systemer". Dette skyldes, at netværksteori hverken er så generel, at den er uden syntetisk indhold, eller så speciel, at den kun kan anvendes i en enkelt fagdisciplin. Netværksteorien er med andre ord et godt kompromis mellem generalitet på den ene side og anvendelighed til konkrete empiriske formål på den anden side.

Da netværksteori for de fleste økonomer er en by i Sibirien, er fremstillingen søgt skrevet sådan, at der ikke kræves særlige forhåndskundskaber ud over elementær matrixregning. Omvendt har jeg forsøgt at gennemgå input-output tabeller fra grunden af, for det tilfældes skyld at rapporten kunne interessere andre end økonomer. Prisen for dette har været, dels at fremstillingen er meget kortfattet, dels at den indeholder et uhyre stort antal definitioner. For at hjælpe på dette er der udarbejdet et indeks over de anvendte definitioner. Terminologien på området synes i øvrigt ikke at ligge helt fast, men jeg har valgt at lægge den så tæt som muligt op ad terminologien i Frank Nielsen(1981), der netop er blevet delpensum i kurset i lineær algebra på Matematikstudiet ved Københavns Universitet.¹⁾

Der er måske grund til at påpege, at rapporten er skrevet af en empirisk økonom for empirikere, og at matematikken derfor i heldigste fald er mangelfuld. Jeg håber, at

1. Desværre er jeg ved et sammentræf af uheldige omstændigheder først sent blevet opmærksom på Frank Nielsens bog, og derfor er der ikke fuld overensstemmelse.

22 MAR. 1985
DANMARKS STATISTIK
BIBLIOTEKET

dette opvejes af min praktiske erfaring i brug af input-output modeller. Frank Nielsens grundige bog må tjene som intellektuelt bagland for den matematisk interesserede læser.

Når man befinder sig i ingenmandsland mellem forskellige fagdiscipliner, har man få venner. Mange kolleger har bekymret spurgt til, hvornår jeg ville begynde at bruge min tid til noget fornuftigt. De vil blive overraskede over, i hvor høj grad denne rapport er en direkte forlængelse af min afhandling til det Statsvidenskabelige Studium. Omvendt har jeg også haft svært ved at gøre mig forståelig over for de eksperter i netværksteori, jeg har haft konsulteret undervejs, fordi mine problemstillinger for dem har været atypiske og upræcist formulerede. Dette forhold er ikke blevet bedre af, at input-output modellen som type af netværksmodel befinder sig et sted midt imellem den elektriske og den operationsanalytiske netværkstradition. Ikke desto mindre er samtlige problemer blevet løst - nogle selvfølgelig grundigere end andre. Dette skyldes ikke mindst den velvilje, jeg har mødt fra flere sider.

Først og fremmest takker jeg afdelingschef Poul Jensen, Danmarks Statistik, der har vist stor interesse for projektet og beredvilligt har stillet "overheads" til rådighed. Desuden en tak til lektor Jens Clausen, DIKU, hvis bøger jeg har slidt tynde - mest Lawler(1976), der er hovedkilde for kapitel 3.

En særlig tak skal gå til fuldmægtig Lars Otto, Budgetdepartementet, adjunkt Leif Hasager, Handelshøjskolen i København og stud. polit. Bent Sørensen, der på urimelige vilkår har forsøgt at tolke de første udkast til manuskriptet, samt til assistent Bente Henriksen, der har tegnet figurer mm.

Endelig en tak til Danmarks Statistiks bibliotek, som jeg har trukket store veksler på - især bibliotekar Mary Nielsen, der smilende har fremskaffet selv de mest bizarre titler. En af de vanskelige var Branin(1977), der er hovedkilde for kapitel 6.

J. Asger Olsen, 31 dec. 1984.

OVERSIGT

Rapportens indhold kan groft siges at bestå af to dele, adskilt af et intermezzo i kapitel 4.

I første del, der består af kapitlerne 1 til 3, gennemgås nogle elementære grundbegreber i hhv. input-output analyse, grafteori og netværksteori, og terminologien lægges fast. Det er tilstræbt, at kapitel 1 til 3 skal kunne læses af alle med et elementært kendskab til matrixalgebra.

Kapitel 4 bør læses som et eksempel på, hvordan netværksteorien kan anvendes på en velkendt problemstilling, men det kan springes over uden tab af kontinuitet. Det indeholder en gennemgang af den "kausalanalyse", der er et velkendt redskab i makroøkonomisk teori. I kapitlet udledes en simpel algoritme til logisk ordning af ligningssystemer, og det vises hvordan den kan suppleres med en analyse af strukturen inden for de "simultane blokke". Endelig foreslås en alternativ analyseform, der tillader afvejning af de forskellige forklaringsfaktorerers numeriske betydning.

Rapportens anden del består af kapitlerne 5 til 7, og den kan bredt gives overskriften "Dualitet i strømningsnetværk". I kapitel 5 vises, at de velkendte input-output pris- og mængdemodeller tilsammen udgør et "min cost" strømningsproblem. I kapitel 6 gennemgås den elektriske netværksteori med særligt henblik på dualitetsforholdene mellem spændinger og strømme, og i kapitel 7 vises, at disse resultater uden videre kan overføres til input-output modellerne. Den traditionelle opstilling af input-output modellerne svarer nøje til den klassiske "knudepunktsmetode" til løsning af elektriske netværksproblemer. For oversigtens skyld vises, hvordan de alternative "maske-" og "klassesdelingsmetoder" også kan anvendes på input-output modeller, men det konkluderes at den traditionelle, knudepunktsorienterede metode er beregningsteknisk overlegen. Endelig påvises det, at den elektriske netværksteori sætter os i stand til at binde pris- og mængdemodellerne sammen i en integreret model, i hvilken priser og mængder afhænger gensidigt af hinanden.

En del af rapportens afsnit er ikke strengt nødvendige for læseren, men er taget med for oversigtens skyld. Disse afsnit, der kan læses kursorisk, er markeret med en asterisk (*) i overskriften.

INDHOLD

1. INPUT-OUTPUT MODELLER	1
1.1. Input-output tabeller	4
1.2. Input-output modeller	8
1.3. Udvidelser af mængdemodellen	12
1.4. Prismodeller	14
2. ORIENTEREDE GRAFER	17
2.1. Hvad er orienterede grafer?	17
2.2. Veje og tilgængelighed	22
2.3. Grafens afledede matricer.	25
2.3.1. En kort digression om logiske matricer ..	25
2.3.2. Tilgængelighedsmatricen	27
2.3.3. Afstandsmatricen*.....	28
2.3.4. "Omvejsmatricen"*.....	31
2.4. Sammenhængsegenskaber og komponenter	32
2.4.1. Typer af sammenhæng	32
2.4.2. Basis for en graf*.....	33
2.5. Incidensmatricer og udspændende træer	34
2.5.1. Punkt-pil incidensmatricen	34
2.5.2. Nabo- og incidensmatricens sammenhæng	36
2.5.3. Udspændende træer	37
2.5.4. Kredsmatricen	41
2.5.5. Den fundamentale nulrelation	43
2.5.6. Snitsæt og snitsætmatricen	45
2.5.7. Strukturmatricernes dualitetsforhold	48
3. NETVÆRK	51
3.1. hvad er et netværk?	51
3.2. Hovedtyper af netværksmodeller*	54
3.2.1. Kapacitive netværk (transportnetværk)*....	54
3.2.2. Additive netværk (omkostningsnetværk)*....	56
3.2.3. Multiplikative netværk (signalgrafer)*....	57
3.3. Strømme i netværk	60
3.3.1. Strømbegrebet i et åbent netværk	60
3.3.2. Lukning af åbne netværk	61
3.3.3. Cirkulationer i lukkede netværk	64
3.3.4. Cirkulationsproblemer og dualitet	67
3.3.5. "Out-of-kilter"-metoden	71
3.3.6. Generaliseringsmuligheder	74
3.3.7. Værdikilder i netværksmodellen*.....	78
4. STRUKTUREL ORDNING AF STORE LIGNINGSSYSTEMER	83
4.1. Logisk ordning af en orienteret graf	84
4.1.1. Identifikation af stærke komponenter	85
4.1.2. Den kondenserede acykliske graf	87
4.1.3. Logisk ordning af en acyklisk graf	89
4.2. Strukturel ordning af ligningssystemer	90
4.2.1. Logisk ordning af ligningssystemer	91
4.2.2. Strømninger af "forklaringskraft"	92
5. INPUT-OUTPUT MODELLER OG STRØMNINGER I NETVÆRK	95
5.1. Input-output tabeller som netværksmatricer	95

5.2.	Input-output modellen som en netværksmodel	98
5.2.1.	En omformulering af standardmodellen	98
5.2.2.	Ækvivalente formuleringer -en digression*	102
5.2.3.	Antallet af ligninger i i-o modellen	104
5.2.4.	En kanttilknyttet input-output model	105
5.3.	Input-output og "min cost" cirkulationer	109
5.3.1.	De kanoniske adfærdsligninger	110
5.3.2.	Input-output cirkulationsproblemet	112
6.	DEN ELEKTROTEKNISKE NETVÆRKSTRADITION	114
6.1.	Det elektriske netværksproblem	114
6.1.1.	Energikilder i elektriske netværk	115
6.1.2.	Opstilling af netværksligningerne	118
6.2.	Lineære (Ohmske) netværk	119
6.2.1.	Knudepunktsmetoden	120
6.2.2.	Maskemetoden	122
6.2.3.	Andre metoder*.....	123
6.2.4.	Roth's diagram - en topologisk oversigt .	125
6.2.5.	Generaliseringsmuligheder	127
7.	NETVÆRKSTEORI OG INPUT-OUTPUT	132
7.1.	De fire formuleringer	132
7.1.1.	Knudepunktsmetoden	132
7.1.2.	Maskemetoden	134
7.1.3.	De fundamentale metoder*.....	137
7.2.	Generaliseringsmuligheder	140
7.3.	Resultater og perspektiver	142
APPENDIX 1.	DUALITET I PROGRAMMERINGSPROBLEMER	144
1.	Programmeringsproblemer	144
2.	Maksimering under ækvivalensrestriktioner	145
3.	Lineær programmering	149
4.	De komplementære slaphedsbetingelser	154
APPENDIX 2.	OM SUMMATIONS- OG FORDELINGSMATRICER	156
1.	Summationsmatricer	156
2.	Fordelingsmatricer	157
2.1.	Proportionalitetsbetingelsen	159
2.2.	Identitetsbetingelsen	160
2.3.	En digression om matricen (I-WG)	161
3.	Summationsmatricer og orienterede grafer	162
4.	Omfordelingsmatricer	163
5.	Omfordelinger og input-output	164
LITTERATUR	166
INDEKS	170

"General Systems Theory is a name which has come into use to describe a level of theoretical model building which lies somewhere between the highly generalized constructions of pure mathematics and the specific theories of the specialized disciplines...

Because in a sense mathematics contains all theories it contains none; it is the language of theory, but it does not give us the content. At the other extreme we have the separate disciplines and sciences with their separate bodies of theory. Each discipline corresponds to a certain segment of the empirical world, and each develops theories which have particular applicability to its own empirical segment. Physics, Chemistry, Biology, Psychology, Economics and so on all carve out for themselves certain elements of the experience of men and develop theories and patterns of activity (research) which yield satisfaction in understanding, and which are appropriate to their special segments.

In recent years increasing need has been felt for a body of systematic theoretical construction which will discuss the general relationships of the empirical world. This is the quest of General Systems Theory. It does not seek, of course, to establish a single, self-contained "general theory of practically everything" which will replace all special theories of particular disciplines. Such a theory would be almost without content, for we always pay for generality by sacrificing content, and all we can say about practically everything is almost nothing. Somewhere however between the specific that has no meaning and the general that has no content there must be, for each purpose and at each level of abstraction, an optimum degree of generality".

K. L. Boulding, i Klir(1969)

I det sidste halve århundrede har der både fra politisk og videnskabeligt hold været stor interesse for at måle og analysere de samfundsøkonomiske hovedstrømninger - såvel i fortidige, nutidige som fremtidige perioder. Denne interesse må ses på baggrund af dels den dårlige verdensøkonomi i 1930'erne, dels fremkomsten af den Keynesianske nationaløkonomi, der giver politikerne et teoretisk grundlag for at bekæmpe økonomiske kriser ved aktiv indgriben. Grundlaget for sådanne makroanalyser er en nationalregnskabsopstilling, hvori man forsøger at give et helhedsbillede af det samfundsøkonomiske liv i en given periode - på samme måde som en virksomhed søger at opgøre sin økonomiske stilling ud fra regnskaber og budgetter.

Den grundliggende synsvinkel bag nationalregnskabsopstillingen er, at hver gang en krone skifter ejermand, går der en eller anden økonomisk modydelse af samme værdi den anden vej. Hvis vi altså kan registrere samtlige pengestrømme i samfundet i en periode, vil vi automatisk få et billede af de modsat rettede strømme af reale ydelser - dvs. varer, tjenester, lønarbejde etc.¹⁾

Hvis billedet skulle være helt dækkende, skulle hver enkelt økonomisk transaktion registreres med oplysning om, hvor meget der handles, hvad der handles, hvem der handler og hvorfor. En sådan gennemgribende registrering er (heldigvis) umulig at gennemføre, så i praksis består Nationalregnskabet af et sæt af udvalgte konti, hvori forskellige hovedstrømme af særlig interesse opgøres på bedste beskub. En konto kan repræsentere en vigtig gruppe af transaktører som fx. staten eller udlandet, eller den kan repræsentere et bestemt formål, som transaktionerne

1. Der er dog to undtagelser: Dels de såkaldte overførselsindkomster, der er pengeoverførsler uden økonomisk modydelse (fx. direkte skatter, offentlige understøttelser, gaver og tyverier), dels de såkaldte ikke-monetære transaktioner, hvori penge ikke er involveret (fx. byttehandlinger eller forbrug af egne varer)

Tabel 1.1 . Nationalregnskab for Danmark 1975 (mia. kr.)

fra	til	1	2	3	4	i alt
1. produktion		76	173	45	65	359
2. forbrug		216		-18	-2	196
3. kapital			24			24
4. udland		67	-1	-3		63
i alt		359	196	24	63	-

Tabellen viser leverancer af realøkonomiske ydelser fra den ene konto til den anden. Dette modsvares i følge vores grundprincip af en pengestrøm af samme størrelse den modsatte vej. Derfor er en leverance i tabellen repræsenteret af en pil den modsatte vej i figur 1.1 . Det fremgår, at af erhvervenes samlede produktionsresultat på 359 mia. kr. solgtes 76 mia til videreforarbejdning, 173 mia til forbrugerne, 45 mia til udbygning og vedligeholdelse af kapitalapparatet (heraf 18 mia til dækning af afskrivninger) og 65 mia til udlandet som eksport. Af de samlede salgsindtægter på 359 mia gik de 76 til indkøb af danskproducerede halvfabrikata, 216 til lønninger og udbytter og 67 til køb af importerede råvarer.

Kontosystemet fra tabel 1.1 kan udvides på et næsten ubegrænset antal måder. Produktionskontoen kunne fx deles op i forskellige erhvervsgræne (brancher), forbrugskontoen kunne fx. deles op efter typer af forbrugere eller efter forbrugets art, og udlandskontoen kunne fx. deles op på lande eller regioner . Det vil føre langt uden for denne rapports formål at behandle disse muligheder nærmere. Vi nøjes med at henvise til fx U.N.(1969) for en detaljeret redegørelse for principperne, og til Thage(1975) eller Danmarks Statistik(1983) for en beskrivelse af det danske system.

Fordelen ved et nationalregnskabssystem er, at det i princippet dækker alle økonomiske transaktioner i et givet samfund i en given periode. Det er derfor velegnet som referenceramme for sektorstudier eller detailundersøgelser af

produktionsgrene, fordi det sikrer den helhedssynsvinkel, som er så uomgængeligt nødvendig i alle økonomiske analyser. Desuden danner nationalregnskabssystemet basis for en koordineret opstilling og sammenkædning af de forskellige økonomiske statistikker, sådan at problemer med usammenlignelige opgørelser af reelt det samme begreb i princippet burde kunne undgås. På denne måde kan man måske forestille sig, at Nationalregnskabet i fremtiden vil komme til at fungere som central database for økonomisk statistik.

1.1. Input-output tabeller

En input-output tabel er en detaljeret specifikation af nationalregnskabets produktionskonto på matrixform. Den kan fx. se ud som tabel 1.2 .

Som vi ser, er produktionskontoen, dvs række og søjle (1) i tabel 1.1, blevet splittet op efter produktionsprocessens art i konti for en række erhverv (et erhverv er en gruppe af virksomheder, der beskæftiger sig med produktion af nogenlunde samme type varer).²⁾ Desuden er leverancerne til forbrug delt op i hhv. privat forbrug og offentligt forbrug.

2. Antallet af erhverv, der udskilles som selvstændige konti i Nationalregnskabet, vil oftest være begrænset af statistiske muligheder. I det danske nationalregnskabssystem er standarden for tiden 117 erhverv, men de 6 viste skulle række til vores formål

Tabel 1.2

Forenklet input-output tabel for Danmark 1975, mia. kr.

	A	N	B	H	Q	O	Cp	Co	I	E	sum
A	3	16					1			3	23
N	3	24	9		7	3	21		7	45	119
B				4	2	2			28		36
H							20				20
Q	3	10	5		22	8	41		2	14	105
O							3	53			56
M	3	25	5		7	2	14		8	3	67
Y	11	44	17	16	67	41	20				216
sum	23	119	36	20	105	56	120	53	45	65	-

Betegnelser:

- A - Landbrug m.m.
- N - Industri og håndværk
- B - Bygge- og anlægsvirksomhed
- H - Boligbenyttelse
- Q - Øvrige erhverv
- O - Offentlig virksomhed

- M - Import af varer og tjenester
- Y - Faktorindkomst og afgifter

- Cp - Privat forbrug
- Co - Offentligt forbrug
- I - Investeringer
- E - Eksport

For at kunne producere sit hovedprodukt kræver hvert erhverv nogle forbrug af inputs. Disse inputs kan enten bestå af output fra andre erhverv på produktionskontoen, eller de kan bestå af varer og tjenester, der ikke produceres af erhvervene. Som fællesbetegnelse for de ikke-producerede inputs skal vi i det følgende bruge "primære inputs". Som eksempler på primære inputs kan nævnes varer og tjenester leveret fra udlandet (import), arbejdskraft og afskrivninger på realkapital. Det kan umiddelbart virke forkert, at afskrivninger betragtes som et ikke-produceret input, al den stund at erhvervenes maskiner og bygninger netop er producerede goder. Svaret på dette er, at maskiner

og bygninger er nødvendige for at kunne sætte produktionen i gang. De må derfor være produceret allerede ved periodens begyndelse og kræver følgelig ikke ekstra produktion i periodens løb. Afskrivninger på maskiner og bygninger slås ofte sammen med virksomhedernes egentlige overskud (aflønning af aktionærer mm) i den såkaldte restindkomst.

Det hører også med til de spidsfindige forhold, at afgifter betragtes som primære inputs. Fænomenet skyldes, at afgifter jo er en betaling fra virksomhederne til staten, og i følge vores grundliggende måleprincip må der altså finde en leverance af realøkonomiske ydelser sted i modsat retning.³⁾

Som modstykke til betegnelsen primære inputs anvendes ofte betegnelsen sekundære inputs om de producerede inputs. Når vi summerer værdien af alle inputs til et givet erhverv - primære som sekundære - fås erhvervets samlede omkostninger som er søjlesummen i tabel 1.2 .

Svarende til opdelingen af inputs i primære og sekundære kan vi også opdele et erhvervs samlede output i leverancer til mellemanvendelse (dvs anvendelse som sekundære inputs i erhvervene) og leverancer til endelig anvendelse (dvs resten). Begrebet endelig anvendelse bliver således en fællesbetegnelse for anvendelse til forbrug, investering og eksport.⁴⁾ Når vi summerer et erhvervs leverancer til samtlige anvendelser, fås erhvervets samlede salgsindtægter, svarende til rækkesummen i tabel 1.2. Bemærk, at da vi betragtede erhvervets overskud som en aflønning af aktionærerne, og da overskuddet er defineret som indtægter minus de egentlige omkostninger, må søjlesummen og rækkesummen for hvert erhverv være ens i tabel 1.2 . Denne fælles sum af faktoraflønninger og salgsindtægter kaldes i det følgende for (brutto-)produktionsværdien.

Når vi senere skal til at analysere input-output tabellens strømme, er det en fordel at opfatte tabellen 1.2 som en matrix:

3. Alternativt kunne man opfatte afgifterne som en overførsel uden modydelse, men dette standpunkt kan også angribes
4. Bemærk at opfattelsen af investeringsanvendelsen som endelig svarer til opfattelsen af afskrivninger på input-siden

$$(1.1) \quad \tilde{C} = \begin{array}{cc|c} & \text{erhverv} & \text{end. anv.} \\ \hline & \tilde{A} & \tilde{E} \\ & \tilde{Y} & \tilde{Y}_f \\ \hline & & \text{erhverv} \\ & & \text{primære inputs} \end{array}$$

(tegnet \sim bruges i det følgende til at angive, at en matrix er målt i monetære enheder som fx kr.).

Rækkesummen i matricen findes ved, at en enhedsvektor i af passende dimension ganges på C -matricen fra højre.

$$(1.2) \quad \tilde{C} i = \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

idet \tilde{g} er en n -vektor af erhvervenes produktionsværdier, og \tilde{y} er en m -vektor af aflønninger til de primære inputs. Tilsvarende findes matricens søjlesum ved, at en enhedsvektor i^t ganges på fra venstre (tegnet t bruges i det følgende til at angive en transponering):

$$(1.3) \quad i^t \tilde{C} = (\tilde{g}^t \quad \tilde{f}^t)$$

idet \tilde{g} som før er produktionsværdierne, og \tilde{f} er en vektor af værdierne af de forskellige typer endelig anvendelse (forbrug, investering og eksport).⁵⁾

Vi vil ofte skulle bruge vektoren af erhvervenes samlede leverancer til endelig anvendelse

$$(1.4) \quad \tilde{e} = \tilde{E} i$$

samt den tilsvarende vektor af leverancer til mellemanvendelse

5. Bogstavet g er en "mnemonic" for "gross production", y for "yields" og f for "final demand"

$$(1.5) \quad \tilde{a} = \tilde{A} i \quad .$$

1.2. Input-output modeller

Input-output modeller opstår, når vi ved hjælp af forskellige antagelser ønsker at forudsige input-output matrixen \tilde{C}_t i en fremtidig periode eller i en hypotetisk situation. Input-output modeller er altså specielt udviklet med henblik på empiriske analyser af en national erhvervsstruktur. De er først udviklet af Wassily Leontief (1936 og 1941), og de kaldes derfor også Leontief-modeller.

Den typiske målsætning for en input-output beregning er at finde den mængde af primære produktionsfaktorer, der er nødvendig for at tilfredsstille nogle givne størrelser af endelig anvendelse. Et typisk input-output problem er for eksempel: Hvis vi bygger en Storebæltsbro til 10 mia. kr., hvor meget merbeskæftigelse vil vi da få?

Første trin i en sådan beregning må være at danne sig et overblik over, hvor mange ordrer der umiddelbart skal udlisteres til de forskellige erhverv (rådgivende ingeniører, entreprenører etc), og hvor stor en merbeskæftigelse disse ordrer vil give. Men regnestykket stopper ikke her. Input-output tabellen viser jo netop, at en del af fx. entreprenørens inputs er produceret af andre danske erhverv. Når entreprenøren får en merproduktion vil han derfor afgive en række afledede ordrer, der vil give merproduktion i fx cementfabrikker, stålværker og vognmandsforretninger etc. Disse afledede ordrer vil give en yderligere beskæftigelsesstigning - de såkaldte indirekte effekter. For at vurdere projektets fulde merbeskæftigelse må vi altså anlægge en samfundsmæssig vurdering med udgangspunkt i det helhedsbillede af økonomien, input-output tabellen giver.

Grundlaget for input-output beregninger er en simpel, lineær produktionsmodel, der bygger på følgende antagelser:

(1.6) Hvert erhverv producerer netop en vare

(1.7) Mængden af input nr i , der kræves for at producere en enhed af vare nr j , er konstant og benævnes k_{ij}

Vi antager mao. at inputproportionerne er uafhængige af tiden, priserne og produktionens omfang. Til produktion af en enhed af vare j kræves altså $k_j = (k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{(n+m)j})$ enheder af de primære og sekundære inputs. Vi skal ikke her bruge tid og kræfter på at bortforklare den manglende realisme i disse antagelser, vi skal blot tage dem for givne og godtage dem som en grov tilnærmelse til virkeligheden. Koefficienterne k_{ij} kaldes også tekniske koefficienter for produktionen af vare j . Hvis vektorerne k_j for varerne $j = 1..n$ opfattes som søjler i en $((n+m) \times n)$ matrix K , kan vi skrive

$$(1.8) \quad \begin{pmatrix} A \\ Y \end{pmatrix} = K \hat{g}$$

idet g er en $(n \times 1)$ -vektor af den producerede mængde af de n varer, A er en matrix $\langle a_{ij} \rangle$, hvor a_{ij} er den mængde af vare i , der kræves til produktionen af g_j enheder vare j og Y er en tilsvarende matrix for de krævede mængder af primære inputs (Tegnet $\hat{\quad}$ angiver, at g -vektoren er diagonaliseret i en $(n \times n)$ diagonalmatrix. Læseren kan selv forvisse sig om, at multiplikation fra højre med \hat{g} betyder, at alle elementerne i den j 'te koefficientsøjle ganges med g_j). De samlede forbrug af inputs kan findes som række-summen i (1.8):

$$(1.9) \quad \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} = K g \quad (\text{idet } g = \hat{g}i)$$

Med ligning (1.7) og (1.8) er vi tæt på at have fundet den søgte model for input-output matrixerne \tilde{A} og \tilde{Y} . Problemet er, at A og Y er målt i fysiske enheder, mens \tilde{A} og \tilde{Y}

er målt i værdi (kr). Vi har følgende grundligning:

$$(1.10) \quad \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = (p; p_y) \begin{pmatrix} A \\ Y \end{pmatrix} = (p; p_y) K \hat{g} \quad ,$$

idet p og p_y er vektorer af enhedspriserne på hhv. varer og primære inputs.⁶⁾ Ligning (1.10) kan betragtes som input-outputmodellernes fundamentalligning. Alle input-output modeller kan på en eller anden måde afledes af (1.10). Udtrykket (1.10) er imidlertid vanskeligt at behandle algebraisk, og dette fik i sin tid Leontief til at vælge nogle ganske bestemte fysiske enheder. Udgangspunktet var, at det er ligegyldigt, om vi måler de fysiske størrelser i kg eller ton, stk eller 1000 stk osv. Den fysiske enhed kan altså vælges frit, uden at vi på nogen måde taber generalitet. Leontief valgte derefter at definere en fysisk enhed af vare nr i som den mængde af vare i , der kan købes for en krone (monetær enhed) i en bestemt basissituation. På denne måde bliver p - og p_y -vektorerne i udgangssituationen til enhedsvektorer, og følgelig bliver

$$\tilde{A}_0 = A_0 \quad , \quad \tilde{Y}_0 = Y_0 \quad \text{og} \quad \tilde{g}_0 = g_0 \quad .$$

Grundligningen kan nu omskrives til:

$$(1.11) \quad \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = (p; p_y) \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} \hat{g} \quad ,$$

hvor

$$(1.12) \quad \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \hat{g}_0^{-1} \quad ,$$

idet A_0 og Y_0 er basisårets inputmatricer målt i Leontief-enheder, og g_0 er den tilsvarende vektor af produktionsværdier i Leontief-enheder. Prisvektorerne p og p_y måles nu

6. p associerer til "prices".

blot som indeks, der er enhedsvektorer i basisåret, og vektoren g er den fysiske produktion målt i Leontief-enheder.

Ved hjælp af det sindrige valg af fysiske enheder er det lykkedes os at tilpasse den tekniske produktionsmodel (1.8) til brug på de monetære nationalregnskabsstørrelser i input-output tabellen. I praksis understøttes dette ved, at Nationalregnskabet offentliggør input-output tabeller i såvel løbende priser (kr) som i faste priser (leontief-enheder). Tabellerne i løbende priser er de hidtil omtalte tabeller over pengestrømmene imellem de forskellige konti i en periode. Tabellerne i faste priser findes da ved, at hver enkelt pengestrøm i tabellen omregnes til den værdi, den ville have haft, såfremt den var blevet handlet til de priser, der gjaldt i et bestemt basisår. Denne proces kaldes også deflatering. I Danmark anvendes for tiden 1980 som basisår.

Resultatet af alt dette er, at fastpris-tabellerne kan tolkes som om, de bestod af fysiske mængder af varer, nemlig målt i Leontief-enheder, defineret ud fra 1980-prisniveau.⁷⁾

Bemærk, at når de tekniske koefficienter er defineret ud fra strømme målt i Leontief-enheder, vil de summe til 1 for hvert erhverv.

Hvis e er en $(n \times 1)$ -vektor af erhvervenes leverede mængder til endelig anvendelse, har vi (da der enten må leveres til mellem- eller til endelig anvendelse):

$$(1.13) \quad \begin{aligned} g &= A i + e \\ &= \bar{A} g + e \end{aligned} .$$

Denne ligning kan normalt løses til

$$(1.14) \quad g = (I - \bar{A})^{-1} e .$$

7. I praksis kan der være flere grunde til, at den fysiske fortolkning af fastpris-tabellerne kan være tvivlsom. Den vigtigste grund er nok, at forudsætningen om, at hvert erhverv kun producerer en enkelt vare, ikke er realistisk. Et givet erhverv vil typisk producere flere forskellige varer, og disse varer vil ikke nødvendigvis have samme pris- og mængdeudvikling. Disse problemer tages grundigt op senere, og vi skal derfor ikke lade dem sinke os her.

Da vi yderligere har

$$(1.15) \quad y = \bar{Y} g, \quad \text{fås}$$

$$(1.16) \quad y = \bar{Y}(I-\bar{A})^{-1} e.$$

Matricen $\bar{Y}(I-\bar{A})^{-1}e$ kaldes også den reducerede produktionsmatrix, og den giver de ønskede sammenhænge imellem givne endelige anvendelser e og de dertil nødvendige direkte og indirekte inputs. Dette kan også ses af følgende rækkeudvikling af den inverterede råvarematrix $(I-\bar{A})^{-1}$:

$$(1.17) \quad g = (I-\bar{A})^{-1}e \\ = (I+\bar{A}+\bar{A}^2+\bar{A}^3+\dots)e.$$

Vi ser, at g er summen af uendelig mange led af formen $\bar{A}^n e$. For $n=0$ er bidraget e , dvs de direkte produktionskrav til leverancen e , svarende til bl.a. entreprenørens produktion i vort gamle eksempel. I næste omgang startes produktion til dækning af dennes sekundære inputs, nemlig $\bar{A}e$, der igen kræver produktion af størrelsen $\bar{A}\bar{A}e=\bar{A}^2e$ etc Hvis der er erhverv, der er gensidigt afhængige af hinandens produktion som sekundære inputs, vil bidraget aldrig helt forsvinde, men aftage asymptotisk mod nul.

1.3. Udvidelser af mængdemodellen

For at kunne anvende input-output modellen på den skitserede måde må vi udefra (eksogent) kunne skønne over mængderne af erhvervsfordelt endelig anvendelse e , jf. (1.13)-(1.16). I de fleste situationer vil det være svært at fastlægge rimelige værdier af disse anvendelser. Dette skyldes ikke alene deres store antal, men også, at vi på forhånd har en anelse om, at elementerne i e -vektoren ikke kan variere uafhængigt af hinanden. For eksempel er det vel rimeligt at antage, at forbruget af benzin (olieraffinaderiernes produkt) er nogenlunde proportionalt med forbruget af biler (bilfabrikkernes produkt). Derimod vil vi ofte have en formodning om, hvordan hovedkategorier af formåls- eller artsfordelt endelig anven-

delse vil udvikle sig, fx investeringerne, eksporten af landbrugsvarer, transportforbruget som helhed osv. Det ligger lige for at prøve at benytte oplysningerne fra input-output tabellens matricer E og Y_f til denne omregning, jf.(1.1). Hvis det antages, at erhvervene leverer i faste proportioner til de forskellige anvendelser, sådan at

$$(1.18) \quad e = \bar{E}f, \text{ hvor}$$

$$(1.19) \quad \bar{E} = E_{00} \hat{f}^{-1}$$

er uafhængig af f og tiden, er problemet løst. Men antagelsen om konstante koefficienter \bar{E} er vanskeligere at begrunde end den tilsvarende antagelse om inputmatricerne. For forbrugskomponenternes vedkommende kender vi dog fra forbrugsteorien muligheden af komplementære varer, dvs varer, der af forskellige årsager altid må anvendes i faste mængdeforhold. Eksempler kan være biler og benzin, robåde og årer mm. Begrundelsen er og bliver dog lidt søgt, sådan at det snarere må afgøres empirisk, hvorvidt E -koefficienterne er tilstrækkeligt stabile. Hvis vi godtager antagelsen - om ikke andet, så af nød - kan vi modificere i-o systemet til

$$(1.20) \quad g = \bar{A}g + \bar{E}f$$

$$(1.21) \quad y = \bar{Y}g + \bar{Y}_f f,$$

idet vi for fuldstændighedens skyld har medtaget en koefficientmatrix Y_f for leverancer af primære inputs direkte til endelig anvendelse. Dette vil så godt som udelukkende være afgifter på salg af forbrugsvarer, og antagelsen om fast koefficientmatrix Y_f svarer da til en antagelse om fast stykafgift på hver komponent i f -vektoren. Systemet (1.20)-(1.21) kan løses til

$$(1.22) \quad y = (\bar{Y}(I-\bar{A})^{-1}\bar{E} + \bar{Y}_f) f$$

1.4. Prismodeller

Input-output modeller kan også bruges til at beregne enhedspriser på produkterne ud fra enhedspriser på de primære inputs. Dette kan ses umiddelbart, hvis vi tager udgangspunkt i fundamentalligningen (1.11).

$$(1.11) \quad \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} = (p^t; p_y^t) \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} \hat{g}$$

Hvis vi tager søjlesummer i (1.11) ved at multiplicere fra venstre med i^t , fås af (1.3):

$$(1.23) \quad \tilde{g}^t = p^t \hat{g} = (p^t \quad p_y^t) \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} \hat{g}$$

hvoraf

$$(1.24) \quad \begin{aligned} p^t &= (p^t \quad p_y^t) \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} \\ &= p^t \bar{A} + p_y^t \bar{Y} \\ &= p_y^t \bar{Y} (I - \bar{A})^{-1} \end{aligned}$$

Denne ligning giver færdigvarepriserne som funktion af enhedspriserne på primære inputs. For eksempel kan modellen bruges til at vurdere, hvordan en stigning i prisen på importeret råolie (som er et primært input) slår igennem på priserne på dansk producerede varer.

Priserne på de endelige anvendelser (bl.a. forbrugerpriserne) kan findes af

$$(1.25) \quad p_f^t = p^t E + p_y^t Y_f$$

$$= p_y^t (Y(I-A)^{-1} E + Y_f) \quad .$$

Det er bemærkelsesværdigt, at det er de samme parametre, der indgår i prisligningerne (1.24) og (1.25) som i mængdeligningerne (1.20)-(1-22). Dette fænomen skal vi senere møde i mange afskygninger i forbindelse med modeller af strømme i netværk.

En stor svaghed ved prismodellerne ovenfor er, at "prisen" på restindkomsten er eksogen, dvs bestemt uden for modellen. Det er fx nærmest utænkeligt, at virksomhederne ikke skulle hæve deres profitmargin pr. produceret enhed, når de øvrige inputs stiger i pris, fx på grund af generel inflation. Der er derfor al mulig grund til at tro, at prisen på restindkomsten vil være en funktion af de øvrige inputpriser, dvs

$$(1.26) \quad p_{ym} = f(p_{y1}, p_{y2}, \dots, p_{y(m-1)}) \quad ,$$

(idet restindkomsten er det m 'te element i p_y -vektoren). Ydermere kan vi næppe forvente, at sammenhængen vil være ens fra erhverv til erhverv. For at kunne formalisere dette må vi imidlertid indføre en særlig terminologi.

Vi kan definere restindkomsten pr. produceret enhed i det j 'te erhverv som

$$(1.27) \quad r_j = \bar{y}_{mj} / g_j \quad .$$

Disse enhedsrestindkomster for erhvervene kan samles i en n -vektor r . Den simple model for r -vektoren, der ligger implicit i (1.23) er da

$$(1.28) \quad r^t = p_{ym}^* (\bar{y}_{m1}, \bar{y}_{m2}, \dots, \bar{y}_{mn}) \quad .$$

Denne model, der kan kaldes modellen med udefra givet restindkomst pr. produceret enhed, er som anført ovenfor så enkel, at den nærmest er utroværdig. I praksis gør man derfor ofte det, at man bestemmer vektoren r i en særlig relation. En typisk model er

$$(1.29) \quad r = \hat{h} p ,$$

dvs at restindkomsten udgør en fast andel af færdigvareprisen i hvert erhverv. Denne model kaldes også modellen med "fast mark-up på de samlede omkostninger". En alternativ hypotese, der også er meget anvendt, er

$$(1.30) \quad r = \hat{h} Y^t p_y ,$$

dvs at restindkomsten udgør en fast andel af de samlede omkostninger til primære inputs i hvert erhverv. Denne hypotese kaldes også antagelsen om fast indkomstfordeling .

Til de fleste af vores formål vil det dog være tilstrækkeligt at bruge den simple antagelse om fast restindkomst pr. produceret enhed.

2. ORIENTEREDE GRAFER

I dette kapitel gennemgås nogle elementære grafteoretiske begreber, som vi skal anvende i de følgende kapitler. Det er tilstræbt, at afsnittet skal kunne tilegnes af læsere med et elementært kendskab til mængdelære og matrixalgebra, men af pladshensyn har det været nødvendigt at gøre det meget kortfattet. En grundig og let tilgængelig fremstilling af emnet er givet af Frank Nielsen(1981). Nielsens bog dækker bl.a. hele indholdet i dette kapitel, og der henvises generelt til den. Specielle henvisninger er givet i teksten og i fodnoter. Da gennemgangen omfatter et meget stort antal definitioner, opfordres læseren til at benytte indekset med sidehenvisninger til disse.

2.1. Hvad er orienterede grafer?

En orienteret graf kan fx defineres som to mængder:

- (2.1.a) En mængde af elementer $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, som vi kalder knudepunkter eller blot punkter ("nodes").¹⁾
- (2.1.b) Et antal sammenhænge imellem punkterne X . Disse repræsenteres formelt ved en binær relation K defineret på mængden X .

En binær relation på X er defineret som en delmængde af det Cartesiske produkt $(X \times X)$. Hvis punktparret (x_1, x_2) tilhører relationen K , siger vi, at der går en umiddelbar påvirkning fra x_1 til x_2 . En orienteret graf kan let illustreres på et stykke papir, idet vi først afmærker punkterne (x_1, \dots, x_n) og derefter indtegner relationen K som pile, der forbinder

1. Den valgte definition er for en endelig graf. Den kan lempes til, at X er en tællelig (men ikke nødvendigvis begrænset) mængde. Hvis X er ubegrænset, siges grafen at være uendelig.

punkterne. Hvis $fx(x_1, x_2)$ tilhører K , repræsenteres denne sammenhæng ved en pil med startpunkt i x_1 og slutpunkt i x_2 .

Et eksempel på en sådan graf er vist i figur 2.1, der afbilder det økonomiske system fra tabel 1.2.²⁾

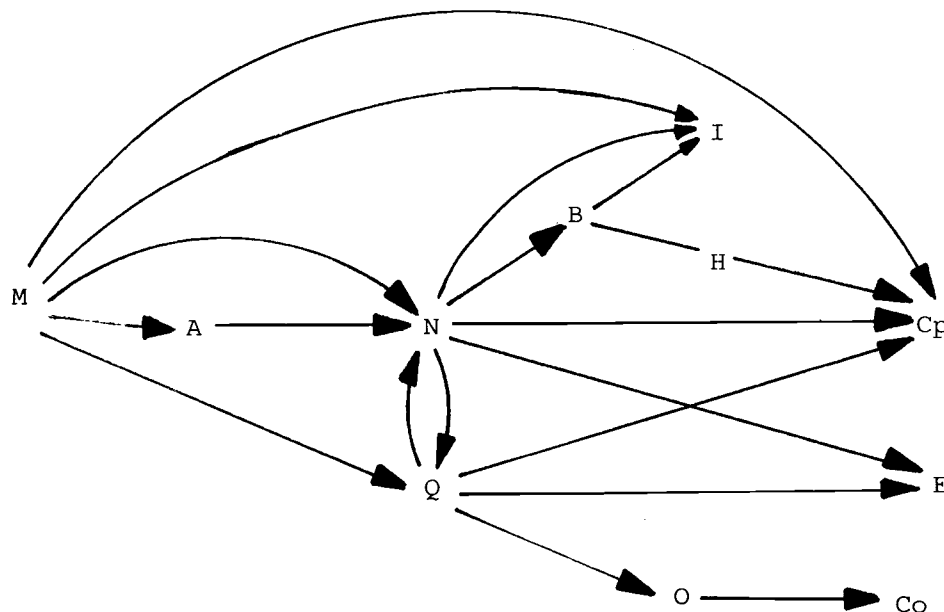
I figuren repræsenterer punkterne de forskellige konti i input-output tabellen (dvs primære inputs, erhverv og endelige anvendelser), og relationen K er defineret ved, at (x_i, x_j) tilhører K , hvis konto nr. i leverer til konto nr. j .

Orienterede grafer er ofte hensigtsmæssige til analyse af det, vi med et bredt ord kalder "systemer". Punkterne X kan da repræsentere systemets elementer, mens pilene K kan repræsentere en nærmest vilkårlig indbyrdes sammenhæng mellem elementerne. Nedenfor er givet en oversigt over nogle forskellige typer systemer, der kan repræsenteres ved en orienteret graf.

X $x_i, i=1..n$ er	K pilen (i,j) tilhører K , hvis
byer	- det er muligt at passere direkte fra x_i til x_j ,
ordrer i EDB-program ansatte i firma	- x_j kan udføres umiddelbart efter x_i , - x_i er overordnet x_j ,
tilstande	- direkte overgang fra x_i til x_j er mulig,
varer og tjenester rørsamlinger	- x_i anvendes i produktionen af x_j , - der går en positiv strøm fra x_i til x_j ,
ledningsterminaler	- der går en positiv strøm fra x_i til x_j ,
beslutningscentre	- signaler kan sendes direkte fra x_i til x_j ,
dokumenter	- x_i er relevant for x_j ,
konti i regnskab	- beløb kan overføres fra x_i til x_j ,

2. Af overskuelighedshensyn er det som hovedregel kun leverancer af størrelsesorden 10 mia. og derover, der er medtaget. Desuden er punktet for faktorindkomst (og pilene fra det) udeladt. Betegnelserne er i øvrigt de samme som i tabel 1.2. En tilsvarende graf for den detaljerede danske input-output tabel er tegnet i J. Asger Olsen(1981) (hvor den dog fejlagtigt kaldes et træ).

Figur 2.1 En input-output graf.



Grunden til, at orienterede grafer er blevet så populære i mange fagdiscipliner er nok, at mennesker i almindelighed synes at få bedre overblik over problemstillinger, når de tegnes på papir, end når de repræsenteres ved talstørrelser eller symboler. Dette ville imidlertid ikke være til megen nytte, hvis ikke det var muligt at "oversætte" den ene repræsentation til den anden. Datamaskiner har det nemlig omvendt: De kan behandle talstørrelser og symboler, men ikke tegninger. Humlen er imidlertid, at der til enhver orienteret graf kan knyttes en matrix, og at enhver matrix omvendt har en underliggende orienteret graf. Det er især denne sammenhæng, der gør orienterede grafer til velegnede redskaber i samspillet mellem mennesker og datamater.

Relationen K er hidtil angivet som en mængde af pile. En alternativ og ofte bedre måde at angive relationen på er at specificere en korrespondance P ved

$$(2.2) \quad P(x_i) = \left\{ x_j : (x_i, x_j) \text{ tilhører } K \right\}$$

Udtrykket $P(x_i) = (x_5, x_7)$ læses da: " x_i påvirker umiddelbart x_5 og x_7 ". I figur 2.1 er fx $P(N) = (I, B, Q, Cp, E)$ og $P(A) = N$. Mængden $P(x)$ kan være tom for nogle punkter x .

Sådanne punkter kaldes terminaler ("sinks"). I figur 2.1 optræder de endelige anvendelser I, Cp, E og Co som terminaler.

Grafen $D = (X, P)$ kan repræsenteres ved en nabomatrix. To punkter x_i og x_j siges at være naboer, hvis enten (x_i, x_j) eller (x_j, x_i) tilhører grafen.

Nabomatrixen $N = (n_{ij})$ af dimensionen $(n \times n)$ kan da defineres ved

$$(2.3) \quad n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } x_j \text{ tilhører } P(x_i) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Nabomatrixen N ("adjacency matrix") indeholder altså et ettal i celle (i, j) , hvis der går en pil fra x_i til x_j , og nuller ellers.³⁾ Nabomatrixen for grafen i figur 2.1 er vist i tabel 2.1.

Tabel 2.1 . Nabomatrixen for grafen i figur 2.1

	M	A	N	B	H	Q	O	Cp	Co	I	E	v_u
M	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	4
A	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
N	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	5
B	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
H	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Q	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	4
O	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Cp	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Co	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_i	0	1	3	1	1	2	1	4	1	3	2	-

For enhver graf D kan vi definere den omvendte graf

3. Økonomer er fortrolige med nabomatrixen som den matrix, der danner udgangspunkt for "kausalanalyse" af økonomiske modeller, jf gennemgangen i kapitel 4.

("converse graph") D' ved at vende orienteringen på alle pile i grafen. Den omvendte graf vil være karakteriseret ved den samme punktmængde X og en invers relation P^{-1} :

$$(2.4) \quad D = (X, P) \quad \Leftrightarrow \quad D' = (X, P^{-1}),$$

hvor

$$(2.5) \quad P^{-1}(x_j) = \left\{ x : x_j \text{ tilhører } P(x) \right\}$$

Figur 1.1 fra forrige kapitel viser penge kredsløbet i samfundet, og den kan opfattes som en orienteret graf. Dens omvendte graf vil i følge det grundlæggende opgørelsesprincip vise det modsat rettede kredsløb af realøkonomiske ydelser. Graferne D og D' siges også at være retningsbestemt duale.⁴⁾ En række af de begreber, vi skal definere i dette kapitel, vil også have en naturlig retningsdual modpart, som findes ved at erstatte korrespondencen P i definitionen med P^{-1} . For eksempel kan vi definere en kilde ("source") som det omvendte begreb af en terminal (dvs et punkt x_j , for hvilket $P^{-1}(x_j)$ er tom, jf. ovenfor). I figur 2.1 optræder importen M som kilde.⁵⁾ Andre begreber vil ikke ændre indhold, hvis pilenes orientering vendes, og disse begreber kaldes selvduale.

Bemærk, at nabomatricen for den omvendte graf er

$$(2.6) \quad N(D') = N^t(D) .$$

En graf siges at være symmetrisk, hvis $P(x) = P^{-1}(x)$ for alle punkter x , svarende til at nabomatricen er symmetrisk. I så fald er det fordelagtigt at erstatte de to pile (x_i, x_j) og (x_j, x_i) med en ikke-orienteret linie i stedet. En sådan ikke-orienteret linie kaldes også et bånd, og som fællesbetegnelse for bånd og pile anvendes den topologisk afledte betegnelse en "kant". Ikke-orienterede grafer har en række anvendelser - fx inden for molekylærbiologien - men de skal ikke behandles nærmere her.⁶⁾ Vi skal dog ofte støde på

4. Denne dualitet må ikke umiddelbart forveksles med andre former for dualitet, fx. imellem linier og punkter eller i lineær programmering. På den anden side er de heller ikke uden forbindelse, som vi senere skal se.
5. Hvis punktet for faktorindkomst, Y , havde været medtaget i figuren, ville det også have været en kilde.
6. I stedet henvises til fx. Harary(1969).

begreber, der af natur er knyttet til ikke-orienterede grafer, dvs. at orienteringen ikke tages i betragtning ved definitionen. I sådanne definitioner bruges ordet "kant" i stedet for "pil".

Antallet af pile, der udgår fra et punkt x_i , kaldes også udgangsvalensen af x_i og skrives $v_u(x_i)$ (eng.: "outdegree"). Udgangsvalensen kan findes som rækkesummen i nabomatricen. Vektoren af udgangsvalenser er altså

$$(2.7) \quad v_u = N i ,$$

som vist i tabel 2.1. Det omvendte begreb af udgangsvalensen er indgangsvalensen $v_i(x)$, og vektoren af indgangsvalenser findes af

$$(2.8) \quad v_i = N^t i .$$

En pil, der har samme begyndelses- og endepunkt, kaldes en sløjfe. I input-output tabellen optræder erhvervenes egenleverancer (interne leverancer) som sådanne sløjfer. En sløjfe er en art trivialtilfælde, der ikke har nogen signifikans i forbindelse med grafens strukturelle egenskaber, og derfor opfattes sløjfen som regel, som om den ikke hører med til grafen, dvs den udelukkes a priori. I den kvantitativt orienterede netværksteori, som vi senere skal vende tilbage til, er det dog nødvendigt at tillade sløjfer.

2.2. Veje og tilgængelighed

En delgraf af grafen $D = (X, K)$ er en graf bestående af en delmængde af punkterne X og en delmængde af kanterne K . Hvis en delgraf omfatter alle den oprindelige grafs punkter, siges den at være udspændende. Vi skal senere vende tilbage til de mange anvendelser af udspændende delgrafer. En tur ("walk") i en graf kan defineres som en delgraf af formen

$$x_1, k_1, x_2, k_2, \dots, k_{n-1}, x_n \quad ,$$

idet k_1 enten er (x_1, x_2) eller (x_2, x_1) , k_2 er enten (x_2, x_3)

eller (x_3, x_2) etc . Hvis der ikke er mulighed for forvekslinger, skal vi i det følgende nøjes med at angive en tur som en følge af punkter. Antallet af pile i turen kaldes turens kardinalitet eller længde. En tur, hvori alle pile peger i samme retning, kaldes en ensrettet tur. I figur 2.1 er N-Cp-Q-N-M en tur, mens N-Q-N-Q-O-Co er en ensrettet tur. Vi skal i det følgende anvende notationen

$$(2.9.a) \quad P(x_i, x_j) = P(x_i) \cup P(x_j)$$

og

$$(2.9.b) \quad P^k(x_i) = P(P^{k-1}(x_i)) .$$

For eksempel vil $P^2(x_i)$ være den mængde af punkter, der kan nås ved at følge først en pil fra x_i til et eller andet x_h og dernæst en pil fra x_h til x_j . Med andre ord vil $P^2(x_i)$ være mængden af punkter, der kan nås fra x_i ad en ensrettet tur af kardinalitet 2. I figur 2.1 er fx $P(B, O) = (I, H, Co)$ og $P^2(A) = (I, B, Q, Cp, E)$.

For at finde antallet af ture fra x_i til x_j erindrer vi, at række h i nabomatricen har et ettal i det j 'te element, hvis der går en pil fra x_h til x_j . Tilsvarende har søjle h et ettal i det i 'te element, hvis der går en pil fra x_i til x_h . Hvis der går en tur af kardinalitet 2 fra x_i til x_j , må produktet $n_{ih}n_{hj}$ altså være lig med 1 for mindst et h . Mere præcist angiver skalarproduktet

$$\sum_{h=1}^n n_{ih}n_{hj}$$

antallet af ensrettede ture fra x_i til x_j af kardinalitet 2. Dette skalarprodukt er som bekendt lig med det (i, j) 'te element i matricen $N^2 = N*N$. Ved induktion får vi da, at

(2.10) Antallet af ensrettede ture fra x_i til x_j af kardinalitet k er lig med det (i, j) 'te element i matricen N^k .

For fuldstændighedens skyld definerer vi, at et punkt er en tur af længden 0, i overensstemmelse med, at $N^0 = I$ (enhedsmatricen).

En tur, i hvilken alle indgående punkter er forskellige,

kaldes en vej ("path"). Vi skal i denne rapport kun beskæftige os med ensrettede veje, sådan at vi i det følgende vil underforstå ordet "ensrettet" foran ordet "vej".

En vej af minimum kardinalitet mellem to punkter kaldes en elementær vej. Alle veje fra x_i til x_j er enten en elementær vej eller en union af flere elementærveje. I figur 2.1 er A-N-B-H-Cp således en vej, mens A-N-Cp er en elementær vej.

Afstanden mellem to punkter kan defineres som længden af en ensrettet elementærvej fra x_i til x_j . Hvis der ikke findes nogen sådan vej er afstanden uendelig. På figuren er fx afstanden fra A til Cp lig med 2, mens afstanden fra A til M er uendelig.

En tur siges at være lukket, hvis den har samme begyndelses- og slutpunkt. I modsat fald siges den at være åben.

En kreds er defineret som en lukket tur af positiv længde, hvori alle punkter er forskellige (pånær det fælles start- og slutpunkt). Hvis turen er ensrettet, siges kredsen også at være ensrettet. I figur 2.1 er M-I-B-N-M således et eksempel på en kreds, mens den eneste ensrettede kreds er N-Q-N.

En af de mest fundamentale strukturelle egenskaber ved en orienteret graf er dens tilgængelighedsforhold. Et punkt x_j siges at være tilgængeligt ("reachable") fra x_i , hvis der eksisterer en ensrettet tur fra x_i til x_j . Mængden af punkter, der er tilgængelige fra x_i inden for afstanden k , betegnes $R_k(x_i)$ og kaldes den k -tilgængelige mængde. Den k -tilgængelige mængde R_k kan findes som

$$(2.11) \quad R_k(x_i) = \bigcup_{h=0}^k P^h(x_i),$$

dvs foreningsmængden af alle de punkter, der kan nås ad en ensrettet tur af kardinalitet $h \leq k$. I figur 2.1 er fx $R_0(A) = A$, $R_1(A) = A \cup P(A) = (A, N)$, og $R_2(A) = A \cup P(A) \cup P^2(A) = (A, N, I, B, Q, Cp, E)$. Når den maksimale tilladte afstand k øges, vokser mængden $R_k(x)$, indtil vi når en bestemt grænse k_{\max} , hvorefter mængden $R_k(x)$ ikke længere vokser med k . Denne mængde kaldes også den tilgængelige mængde slet og ret, og

den skrives $R(x)$ (uden fodtegn).⁷⁾ I Figur 2.1 er fx $R(A) = (A, N, I, B, H, C_p, E, Q, O, C_o)$. Tilsvarende definerer vi den tilgængelige mængde fra en punktmængde S som $R(S)$, nemlig unionen af de enkelte punkters tilgængelige mængder.

2.3. Grafens afledede matricer.

I dette afsnit defineres tre afledede matricer, knyttet til en orienteret graf D . Alle tre matricer kan afledes fra nabomatricen N . Da denne matrix i praksis kan være temmelig stor, er det ofte en beregningsteknisk fordel at opfatte den som en logisk matrix i stedet for en numerisk matrix. I en logisk matrix er elementerne som bekendt ikke tal, men derimod værdierne "sand" eller "falsk", ofte repræsenteret ved tallene hhv 1 og 0. Disse værdier kan i princippet lagres i en enkelt "bit" i en datamaskine, og logiske matricer vil derfor optage væsentlig mindre plads end numeriske, ligesom de er hurtigere at operere på. Derfor indledes afsnittet med en omtale af logisk matrixalgebra. Derefter defineres og udledes tilgængelighedsmatricen, afstandsmatricen og omvejsmatricen.

2.3.1. En kort digression om logiske matricer

Den grundlæggende forskel på logiske matrixudtryk og numeriske er, at de skalare operationer addition og multiplikation erstattes af hhv. logisk "eller" og logisk "og". Dette kræver måske en uddybning. Vi starter med at notere os, at skalarproduktet af to vektorer kan siges at bestå af to operationer. I første trin element-til-element-multipliceres de to vektorer, dvs at det i 'te element i den ene vektor multipliceres med det i 'te element i den anden vektor. I andet trin summeres de fremkomne produkter til en skalar. Den første operation, multiplikationen, kan passende kaldes elementoperationen, da den har de enkelte elemen-

7. Det er oplagt, at k_{\max} må være mindre end n , antallet af knudepunkter. Hvis der ikke findes en tur af længden $(n-1)$, findes der i hvert fald ikke nogen, der er længere.

ter som operander og ikke ændrer vektorernes dimension. Den anden operation, additionen, kan tilsvarende kaldes den reducerende operation, idet den reducerer operanden fra at være en vektor til en skalar. Det logiske skalarprodukt kan nu defineres ved elementoperationen "og" og den reducerende operation "eller". Med denne modifikation kan skalarproduktet af to logiske vektorer defineres fuldstændig som et skalarprodukt af reelle vektorer. Den logiske differens imellem a og b kan defineres som (a eller non b). Generaliseringen til logiske matricer er triviel. Det er dog værd at notere sig, at den "logisk inverse" af en logisk matrix kun eksisterer, hvis matricen er en permutationsmatrix (dvs med netop et ettal i hver søjle og række). Den inverse af sådan en matrix er dens transponerede.

Bortset fra disse mindre modifikationer kan de almindelige regneregler for matrixalgebra også anvendes på logiske matricer. Vi skal i det følgende anvende de normale tegn *, x, + og - for hhv. matrixmultiplikation, element-til-element-multiplikation, addition og subtraktion på logiske matricer, men vi skal forsyne operatoren med en understregning, hvis den er logisk.

$$\begin{aligned} \underline{A} * \underline{B} &= C & : & & c_{ij} &= \bigvee_{h=1}^n (a_{ih} \wedge b_{hj}) \\ \underline{A} x \underline{B} &= C & : & & c_{ij} &= (a_{ij} \wedge b_{ij}) \\ \underline{A} + \underline{B} &= C & : & & c_{ij} &= (a_{ij} \vee b_{ij}) \\ \underline{A} - \underline{B} &= C & : & & c_{ij} &= (a_{ij} \vee \text{non}(b_{ij})) \\ \underline{A}^k &= C & : & & C &= \underline{A}^{k-1} * \underline{A} \end{aligned}$$

Den k'te logiske potens af nabomatricen N vil analogt med (2.10) have et ettal i celle (i,j), hvis der eksisterer mindst en ensrettet tur af kardinalitet k fra x_i til x_j , nul ellers.

2.3.2. Tilgængelighedsmatricen

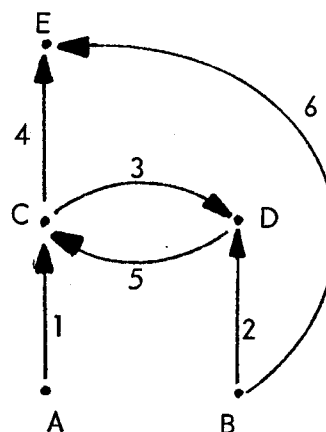
Tilgængelighedsmatricen ("reachability matrix") kan nu defineres som $R=(r_{ij})$, hvor

$$(2.12) \quad r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } x_j \text{ er tilgængelig fra } x_i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

I figur 2.2 er vist et eksempel på en graf, dens nabomatrix og dens tilgængelighedsmatrix.

Figur 2.2. En graf og dens logiske matricer

	N						R				
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
A	0	0	1	0	0	A	1	0	1	1	1
B	0	0	0	1	1	B	0	1	1	1	1
C	0	0	0	1	1	C	0	0	1	1	1
D	0	0	1	0	0	D	0	0	1	1	1
E	0	0	0	0	0	E	0	0	0	0	1



Vi erindrer, at x_j er tilgængelig fra x_i , hvis og kun hvis der eksisterer en ensrettet tur fra x_i til x_j . Dette vil være tilfældet, jf (2.10), hvis det (i,j) 'te element i blot en af matricerne N, N^2, N^3, \dots, N^n er forskelligt fra nul.

Følgende algoritme vil derfor finde tilgængelighedsmatricen:

- (2.13) 1. Sæt $k=0$
 sæt $R_0 = I$ (R_k er den k -begrænsede tilgængelighedsmatrix)
 sæt $N^0 = I$ (N^k er den k 'te logiske potens af N)

2. Gentag

- sæt $k = k+1$
 sæt $N^k = N^{k-1} * N$
 sæt $R_k = R_{k-1} \pm N^k$
 indtil $R_k = R_{k-1}$.

Ved algoritmens stop vil R_k være tilgængelighedsmatricen, og $k-1$ vil være den største endelige afstand imellem to punkter i grafen. Bemærk, at matricerne R_k , der fremkommer undervejs, har interesse i sig selv, idet de er tilgængelighedsmatricerne for største afstand k .

Grafens tilgængelighedsegenskaber som repræsenteret ved R -matricen er meget vigtige ved strukturelle analyser. For eksempel kan vi umiddelbart se fra R -matricen, hvilke punkter der kan påvirkes direkte og indirekte fra et givet punkt x_i , som kan være kontrolleret. Derfor er tilgængelighedsegenskaberne et vigtigt objekt for kontrol- og regulerings-teori (jf fx Franksen m.fl.(1979)).

2.3.3. Afstandsmatricen*

Afstandsmatricen ("distance matrix") D er en anden matrix, der indeholder oplysninger om tilgængeligheden i grafen, men den indeholder flere oplysninger end R -matricen. R -matricen kan nemlig afledes af afstandsmatricen D , men ikke omvendt. Til gengæld er afstandsmatricen en numerisk matrix, der altså er dyrere at udlede.

Afstanden $d(x_i, x_j)$ mellem to punkter x_i og x_j er ovenfor defineret som kardinaliteten af en elementær vej fra x_i til x_j . Hvis x_j ikke er tilgængelig fra x_i er afstanden uendelig. Afstandsmatricen $D = (d_{ij})$ kan nu defineres ved

$$(2.14) \quad d_{ij} = d(x_i, x_j) .$$

Afstandsmatricen kan udledes på næsten samme måde som R-matricen. Da afstanden fra x_i til x_j er lig med længden af den korteste ensrettede tur fra x_i til x_j , vil d_{ij} være lig med det mindste k , for hvilket celle (i, j) i matricen N^k er forskellig fra nul, jf (2.10). Hvis et sådant k ikke findes, er afstanden uendelig.

Herefter kan afstandsmatricen findes analogt med tilgængelighedsmatricen:

(2.15) 1. Sæt $k=0$

Definer matricen D_0 ved

$$d_{ij}^0 = 0, \text{ hvis } i = j, \\ \text{uendeligt ellers}$$

(D er matricen for afstande $\leq k$)

$$\text{sæt } N^0 = I$$

2. Gentag

sæt $k=k+1$

$$\text{sæt } N^k = N^{k-1} * N$$

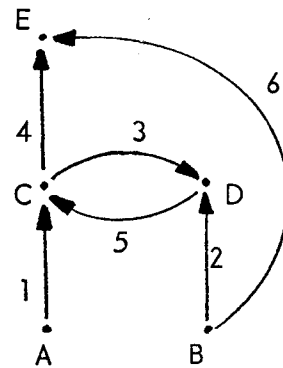
find D_k ved at sætte

$$d_{ij}^k = k, \text{ hvis} \\ (n_{ij}^k = 1) \text{ og } (d_{ij}^{k-1} \text{ er uendelig}) \\ d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1} \text{ ellers}$$

$$\text{indtil } D_{k-1} = D_k .$$

Afstandsmatricen for grafen i figur 2.2. er

	A	B	C	D	E
A	0	-	1	2	2
B	-	0	2	1	1
C	-	-	0	1	1
D	-	-	1	0	2
E	-	-	-	-	0



(tegnet - markerer, at afstanden er uendelig).

Afstandsmatricen kan imidlertid findes mere effektivt, hvis vi definerer en særlig slags matrixmultiplikation ved

$$C = \hat{A} * B \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \min_k (a_{ik} + b_{kj})$$

Som ved almindelig matrixmultiplikation er c_{ij} altså lig med skalarproduktet af A-matricens række i og B-matricens søjle j. Men hvor skalarproduktet normalt defineres ved elementoperationen * (multiplikation) og den reducerende operation + (addition), er det her defineret ved elementoperationen + (addition) og den reducerende operation "min" (minimering). Vi danner nu matricen D_1 ved at erstatte alle nuller uden for diagonalen i nabomatricen med tallet "uendeligt" (læseren kan selv overbevise sig om, at denne D_1 er lig med D_1 -matricen fra (2.15)). Det kan nu vises, at

$$(2.16) \quad D_{k+1} = \hat{D}_k * D_1, \quad ,$$

sådan at afstandsmatricen D kan findes som $(D_1)^{\hat{n} \ 8}$. Se i øvrigt den udtømmende gennemgang af "shortest paths" i Lawler(1976).

Bemærk, at den k-begrænsede tilgængelighedsmatrix kan udledes direkte af D-matricen, nemlig ved at sætte $r_{ij}^k = 1$, hvis $d_{ij}^k \leq k$, og $r_{ij}^k = 0$, hvis $d_{ij}^k > k$.

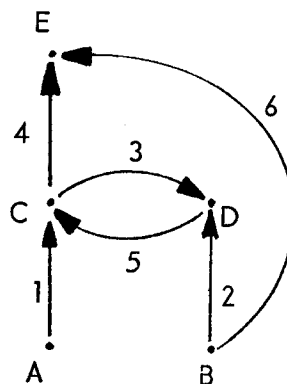
Tilgængelighedsmatricen R vil være tilstrækkelig til de fleste formål, fx til at undersøge en models implikationsstruktur. Men vi skal snart se, hvordan vi er nødt til at kende afstandsmatricen, hvis vi ønsker at undersøge indekomposable systemer.

8. En mere effektiv algoritme er Floyd-Warshall metoden, jf. Lawler(1976)

2.3.4. "Omvejsmatricen"

Afstandsmatricen D angiver i det (i,j) 'te element kardinaliteten af en korteste vej fra i til j . Vi kan analogt hermed definere omvejsmatricen ("detour matrix") ved, at dens (i,j) 'te element angiver kardinaliteten af den længste vej fra i til j . Omvejsmatricen for grafen i figur 2.2 er

	A	B	C	D	E
A	0	-	1	2	2
B	-	0	2	1	3
C	-	-	0	1	1
D	-	-	1	0	2
E	-	-	-	-	0



Bemærk, at omvejsmatricen for denne simple graf er lig med afstandsmatricen, på nær elementet (B,E) . Der er imidlertid ikke udviklet effektive metoder til at finde omvejsmatricen for større grafer, med mindre de er acykliske (dvs at de ikke indeholder en ensrettet, lukket tur). Dette skyldes, at det overraskende nok ikke har været muligt at udvikle en effektiv algoritme til at finde en udspændende kreds for en sådan lukket tur - en såkaldt Hamilton-kreds.⁹⁾ En variant af dette problem er kendt under navnet "den rejsende handelsmands problem": Hvordan kan en rejsende handelsmand besøge samtlige byer i sit distrikt så billigt som muligt på en sådan måde, at han slutter i sit udgangspunkt efter at have passeret samtlige byer netop en gang? Dette problem er trods meget hovedbrud endnu ikke effektivt løst, og mange matematikere tvivler på, at det nogensinde vil blive det.

9. Hvis den lukkede tur indeholder en såkaldt teta-graf, vil den dog ikke have nogen Hamilton-kreds, jf Harary(1969).

2.4. Sammenhængsegenskaber og komponenter

2.4.1. Typer af sammenhæng

Rustet med det meget anvendelige begreb tilgængelighed kan vi nu definere en række typer af sammenhænge imellem to punkter.

- (2.17)
- A. To punkter x_i og x_j siges at være adskilte (0-sammenhængende, hvis der ikke eksisterer nogen tur mellem x_i og x_j (Bemærk, at turen ikke behøver at være ensrettet)).
 - B. Punkterne x_i og x_j siges at være (svagt) sammenhængende eller 1-sammenhængende, hvis der går en ikke nødvendigvis ensrettet tur mellem x_i og x_j .
 - C. Punkterne x_i og x_j siges at være ensrettet eller 2-sammenhængende, hvis der eksisterer en ensrettet tur fra x_i til x_j eller fra x_j til x_i , dvs hvis x_j tilhører $R(x_i)$ eller x_i tilhører $R(x_j)$.
 - D. Punkterne x_i og x_j kaldes stærkt eller 3-sammenhængende, hvis der findes en ensrettet tur både fra x_i til x_j og fra x_j til x_i , dvs. hvis x_j tilhører $R(x_i)$ og x_i tilhører $R(x_j)$.

Bemærk, at kategorierne B,C og D er stadig snævrere: Hvis to punkter er stærkt sammenhængende, vil de også være ensrettet sammenhængende og sammenhængende, men ikke omvendt. Bemærk yderligere, at hvis to punkter ligger i en ensrettet kreds, vil de være stærkt sammenhængende. Omvendt vil to stærkt sammenhængende punkter tilhøre mindst en og måske flere ensrettede kredse.

En hel graf D siges tilsvarende at være sammenhængende,

ensrettet eller stærk, hvis samtlige punkter i grafen tilhører den pågældende sammenhængskategori. Hvis de $n-1$ punkter i en graf er stærkt sammenhængende og det sidste punkt er ensrettet sammenhængende med de øvrige, vil grafen altså ikke være stærk, kun ensrettet.

Vi definerer nu en komponent af grafen D med hensyn til en bestemt egenskab som en relativt maksimal delgraf af D , der opfylder egenskaben. Det vil sige, at en delgraf er en komponent, hvis vi ikke kan føje et punkt eller en kant fra D til delgrafen, uden at egenskaben for den går tabt. En sammenhængskomponent af D er derfor en relativt maksimal delgraf, der er sammenhængende, og en ensrettet og en stærk komponent er tilsvarende maksimale delgrafer, der er ensrettede og stærke. Et isoleret punkt kan opfattes som et trivialtilfælde af både en sammenhængs- en ensrettet og en stærk komponent. Grafen i figur 2.2 udgør således en enkelt sammenhængskomponent, mens den har to ensrettede komponenter med punkterne $A-C-D-E$ og $B-C-D-E$. Den har en enkelt ikke-triviell stærk komponent med punkterne $C-D$, mens punkterne A , B og E er trivielle stærke komponenter. Bemærk, at mens to sammenhængskomponenter altid vil være disjunkte, og to stærke komponenter altid vil være disjunkte, vil to ensrettede komponenter i almindelighed godt kunne have både pile og punkter fælles. Sammenhængskomponenterne og de stærke komponenter udgør altså en klassedeling af grafens punkter og pile, mens det samme ikke er tilfældet for de ensrettede komponenter.

2.4.2. Basis for en graf*

En basis B er en relativt minimal punktmængde, hvorfra alle grafens punkter er tilgængelige. Mere formelt er B en basis for D , hvis

$$(2.18) \quad R(B) = X \quad \text{og} \\ \text{for alle ægte delmængder } S \text{ af } B \text{ er } R(S) \text{ en ægte} \\ \text{delmængde af } X.$$

Det følger umiddelbart, at ingen punkter i B kan være til-

gængelige fra andre punkter i B , for ellers ville B ikke være minimal. Derfor må et punkt i basis enten have indgangsværdien nul eller ligge i en ikke-triviel stærk komponent, hvorfra ingen andre punkter er i basis. Dette betyder, at ethvert punkt b_i i basis må være en entydig basis for en eller flere ensrettede komponenter. Mængden af tilgængelige punkter fra b_i , $R(b_i)$, kaldes også fundamental-mængden for b_i . Den vil være lig med unionen af de ensrettede komponenter, der har b_i som basis. Fundamentalmængden for b_i kan fortolkes som den mængde af punkter i grafen, der kan påvirkes fra basispunktet b_i . I grafen for en input-output tabel vil basis være de primære inputs, og en fundamental mængde for input nr. i vil være de konti, der direkte eller indirekte modtager leverancer af input i .

De omvendte begreber af en basis og en fundamentalmængde kaldes en kontrabasis og en kontrafundamental mængde. Kontrabasis for en input-output graf vil være de endelige anvendelser, og den kontrafundamentale mængde for den j 'te endelige anvendelse vil være de primære inputs og erhverv, der leverer direkte eller indirekte til denne anvendelse.

2.5. Incidensmatricer og udspændende træer

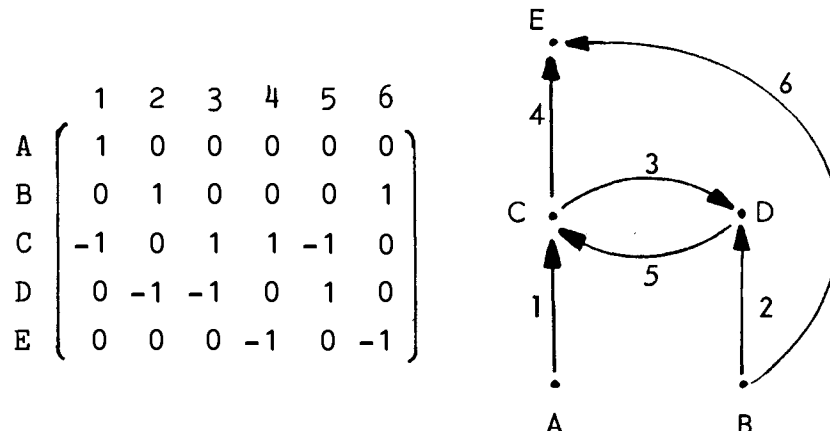
2.5.1. Punkt-pil incidensmatricen

I dette afsnit skal vi beskæftige os med en anden måde at repræsentere orienterede grafer på end den, vi hidtil har benyttet (nabomatricen). Vi skal bruge en alternativ type repræsentation, der er meget anvendt inden for netværksteorien, nemlig incidensmatricer. Ordet incidens betyder berøring, og en incidensmatrix er en rektangulær matrix, der angiver, hvordan forskellige topologiske objekter "rører ved" hinanden. Når vi taler om incidensmatricen på bestemt form, vil vi forstå en speciel incidensmatrix, nemlig punkt-pil incidensmatricen, der angiver om en pil "rører" et punkt eller ej. Mere præcist defineres den udvidede incidensmatrix $\bar{A} = (a_{ij})$ af dimensionen (punkter \times pile) ved

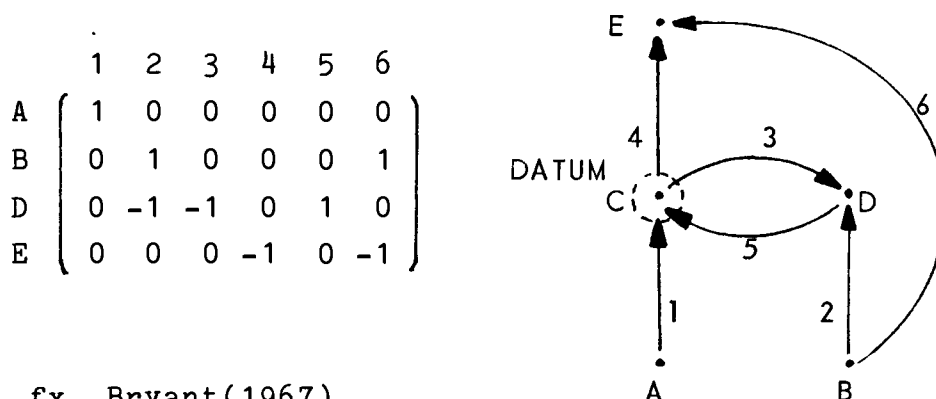
$$(2.19) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ udgår fra punkt } i \\ -1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ går ind i punkt } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

I figur 2.3 er grafen fra figur 2.2 gentaget, og dens punkt-incidensmatrix er vist.

Figur 2.3. En graf og dens incidensmatrix



Det er indlysende, at den udvidede incidensmatrix \bar{A} ikke kan have fuld rang, idet søjlesummerne pr. definition er nul. Generelt gælder, at rangen af \bar{A} er $(n-k)$, hvor n er antallet af knudepunkter og k er antallet af sammenhængskomponenter i grafen.¹⁰⁾ Vi skal i det følgende antage, at grafen D er sammenhængende, sådan at rangen af \bar{A} er $(n-1)$. I så fald kan vi fjerne en vilkårlig af rækkerne i \bar{A} , fx den for knudepunkt nr. k , idet denne række kan fremstilles som en linearkombination af de øvrige rækker. Med et lån fra elektrisk netværksteori siger vi, at punktet k er valgt som reference eller datum. Den således reducerede incidensmatrix betegnes A (uden streg over), og den kaldes i det følgende blot incidensmatrixen. Hvis punktet C fx vælges som reference i figur 2.3, fås den reducerede incidensmatrix



10. Jf. fx. Bryant(1967)

Det ses, at i den reducerede punktmatrix A er søjlesummerne nul for de pile, der ikke er incidente til referencen, -1 for de pile, der går ud fra referencen, og $+1$ for pilene til referencen. Vi skal normalt sortere pilene på en sådan måde, at pilene fra referencen kommer først, mens pilene til referencen kommer sidst, dvs at

$$(2.20) \quad i^t A = (-i, 0, i) \quad ,$$

hvor i symboliserer passende valgte vektorer af ettaller.

Hvis grafen er sammenhængende, vil den reducerede incidensmatrix A som nævnt have fuld rang $(n-1)$. Dette betyder, at vi kan udtage mindst en kvadratisk delmatrix A_S af A med rang $(n-1)$, sådan at $(A_S)^{-1}$ eksisterer. Delmatrixen A_S kaldes en basismatrix for A .

2.5.2. Nabo- og incidensmatrixens sammenhæng

Da nabomatrixen og incidensmatrixen hver for sig er en komplet repræsentation af grafen, er det oplagt at der må være en snæver sammenhæng mellem de to matrixer. For at finde denne sammenhæng bemærker vi, at incidensmatrixen kan opfattes som differensen af to matrixer, der hver for sig udelukkende indeholder ettaller og nuller:

Definer de to matrixer udmatrixen $\bar{G}_u = (g_{ij}^u)$ og indmatrixen $\bar{G}_i = (g_{ij}^i)$ af dimension $(n \times a)$ ved

$$(2.21) \quad g_{ij}^u = \begin{cases} 1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ går ud fra punkt } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$(2.22) \quad g_{ij}^i = \begin{cases} 1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ går ind i punkt } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Matrixerne \bar{G}_u og \bar{G}_i er de byggesten, alle repræsentationer af grafer er bygget op på, og de er særligt centrale i forbindelse med input-output modeller. De vil indeholde netop et ettal i hver søjle, og de vil følgelig være summationsmatrixer, jf. appendix 2. Vi har

$$(2.23) \quad \mathbf{i}^t \bar{G}_u = \mathbf{i}^t$$

$$(2.24) \quad \bar{G}_u^t \mathbf{i} = v_u \quad ,$$

hvor v_u er en $(n \times 1)$ vektor af punkternes udgangsvælenser, jf. (2.7). Tilsvarende er vektoren af række Summer i \bar{G}_i en vektor af indgangsvælenser, jf. (2.8). Af definitionerne følger, at den udvidede incidensmatrix \bar{A} kan skrives

$$(2.25) \quad \bar{A} = \bar{G}_u - \bar{G}_i \quad ,$$

og tilsvarende er den reducerede incidensmatrix

$$(2.26) \quad A = G_u - G_i \quad ,$$

hvor G_u og G_i er de reducerede ud- og indmatricer, hvor rækken for referenceknudepunktet er fjernet.

Bemærk, at mens (2.24) stadig vil holde for de reducerede matricer (blot uden referencens ud- og indgangsvælenser), vil søjlesummerne ikke som i (2.23) være 1 for G_u og G_i . For de pile, der hhv. udgår fra referencen og ender i referencen, vil søjlesummen i hhv. G_u og G_i være 0.

Nabomatricen kan også udledes på en enkel måde ud fra de to summationsmatricer, nemlig som

$$(2.27) \quad N = \bar{G}_u \bar{G}_i^t \quad .$$

Det overlades til læseren at udlede dette. Valget af reference svarer til, at fx. den k 'te række og søjle i nabomatricen stryges. I kapitel 3 skal vi vende tilbage til denne proces i forbindelse med diskussionen af åbne kontra lukkede strømningsnetværk.

Før vi går videre, må vi imidlertid definere begrebet et træ og udlede nogle egenskaber ved træer.

2.5.3. Udspændende træer

Følgende tre definitioner af et træ er ækvivalente, jf. fx Christophides(1975). Et træ er:

- (2.28) A. En sammenhængende graf med n punkter og $(n-1)$ kanter
- B. En sammenhængende graf uden kredse
- C. En graf, i hvilken ethvert par af punkter er forbundet med en og kun en vej (ikke nødvendigvis ensrettet) .

Bemærk, at definitionen af et træ ikke tager hensyn til orienteringen af kanterne.

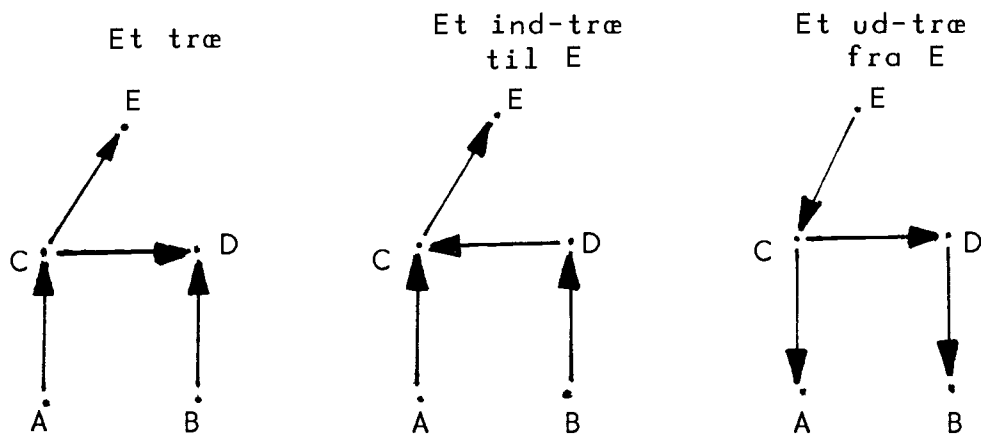
En udspændende delgraf for grafen D er ovenfor defineret som en delgraf med samme punktmængde som D , men med en delmængde af D 's kanter. Hvis D er en sammenhængende graf med n punkter, kan et udspændende træ for D defineres som en udspændende delgraf, der er et træ (dvs opfylder (2.28)). Et udspændende træ vil være en minimal, sammenhængende udspændende delgraf af D og kaldes derfor også et skelet.¹¹⁾ For eksempel udgør kanterne 1,2,3 og 4 et skelet for grafen i figur 2.3.

Et ensrettet træ T_r med roden x_r - et ud-træ - er det orienterede modstykke til definitionen af et træ, og det er karakteriseret ved

- (2.29) A. T_r er et træ
- B. Et af punkterne i træet har indgangsværdi nul og kaldes roden x_r
- C. Punktet x_r er en kilde for træet, dvs at $R(x_r) = T_r$ (alle punkterne i træet er tilgængelige fra x_r igennem træet) .

En mere formel definition er, at et ensrettet træ med rod x_r er en orienteret graf, i hvilken indgangsværdien for x_r er nul og for alle andre punkter er 1. Det omvendte begreb af

11. En alternativ definition af et udspændende træ er en maksimal sammenhængende delgraf uden kredse, idet en minimal udspændende delgraf ikke kan indeholde nogen kredse



et ud-træ er et ind-træ, som har netop et punkt med udgangsvalens 0.¹²⁾ I figur 2.3 findes ingen ud-træer, men kanterne 1,4,5 og 6 udgør et ind-træ til punktet E.

Antallet af træer i en graf stiger generelt meget hurtigt med antallet af punkter og kanter. Der gælder følgende bemærkelsesværdige sætning:

(2.30) Antallet af forskellige træer i en sammenhængende graf uden sløjfer er givet ved $\det(AA^t)$, hvor A er grafens incidensmatrix

(bemærk, at $\det(AA^t)$ er lig med co-faktoren til referencepunktet i matricen $\bar{A}\bar{A}^t$).

Antallet af ind-træer til et givet punkt i grafen kan findes som co-faktoren til et vilkårligt element i punktets række i i matricen

$$(2.31) \quad N_{vu} = \bar{G}_u \bar{A}^t$$

Da et ud-træ for grafen er et ind-træ for den omvendte graf, fås at antallet af ud-træer fra punktet er lig med den tilsvarende co-faktor i matricen $-\bar{G}_i \bar{A}^t$, se referencer i

12. En separabel nytte- eller produktionsfunktion er et godt eksempel på et ind-træ

Harary(1969).¹³⁾

Når træer er så anvendte i forbindelse med netværksmodeller, hænger det sammen med følgende sætning, som vi senere skal vende tilbage til:

(2.32) En delmatrix A_S af incidensmatricen $A(D)$ er en basismatrix for A hvis og kun hvis A_S er incidensmatricen for et udspændende træ for D

Kanterne i et udspændende træ for D kaldes trægrene, og de øvrige kanter i D kaldes korder. Mængden af korder kaldes også trækomplementet eller co-træet. Træet og co-træet udgør en klassedeling af mængden af kanter i grafen, og vi kan derfor omsortere og opdele incidensmatricen i to submatricer, så

$$(2.33) \quad A = \begin{pmatrix} A_S & A_C \end{pmatrix},$$

idet A_S er incidensmatricen for det udspændende træ, og A_C er den tilsvarende incidensmatrix for trækomplementet (korderne). Bemærk, at inddelingen ikke entydig, idet der findes $\det(AA^t)$ forskellige udspændende træer for D . Vi skal i det følgende tage valget af træ for givet - det ene kan til vores formål være lige så godt som det andet. Klassedelingen kan også udvides til at gælde grafer, der ikke er sammenhængende, idet vi da vælger en udspændende skov for grafen, dvs en delgraf, bestående af et udspændende træ for hver af grafens sammenhængskomponenter.

For en graf med n punkter og a kanter gælder, at

$$(2.34) \quad a = n - k + m,$$

hvor k er antallet af sammenhængskomponenter og m er antallet af korder i co-træet ($(n-k)$ er antallet af trægrene, jf. ovenfor). I en sammenhængende graf vil antallet af korder

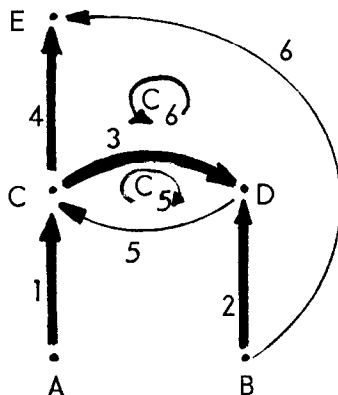
13. Udmatricen for den omvendte graf er jo lig med \bar{G}_1 og vice versa. Heraf følger, at incidensmatricen for den omvendte graf er $-\bar{A}$. Herefter er resultatet trivielt. Matricen N_{vu} i (2.31) er lig med den negative nabomatrix, bortset fra at nullerne i diagonalen er erstattet med punkternes udgangsværdier

derfor være $m = a - (n-1)$.

2.5.4. Kredsmatricen

Vi skal i dette afsnit se, hvordan begrebet en kreds er nært knyttet til begrebet et udspændende træ. Et udspændende træ var jo en maksimal delgraf uden kredse. Dette betyder, at hvis vi føjer en vilkårlig pil fra co-træet til et udspændende træ, vil vi danne netop 1 kreds bestående af korden plus et ukendt antal trægrene. En sådan kreds kaldes også en basiskreds eller en fundamental kreds (eller blot f-kreds). Af (2.34) følger, at en sammenhængende graf indeholder $m = a - (n-1)$ fundamentalkredse. I vores efterhånden velkendte eksempel fra figur 2.3 kan vi fx vælge et træ bestående af kanterne 1, 2, 3 og 4, sådan at korderne 5 og 6 definerer hver sin fundamentalkreds C_5 og C_6 . Dette er illustreret i figur 2.4, hvor trægrenene er trukket op med fed streg.

Figur 2.4. En graf og dens fundamentalkredse



I en orienteret graf vil fundamentalkredsene ikke generelt være ensrettede, men det vil vise sig hensigtsmæssigt at give dem en orientering (omløbsretning), som vi arbitrært, men bedrøvendende lader bestemme af orienteringen af den definerende korde. En pil kan nu indgå i kredsen med eller mod kredsens omløbsretning som illustreret i figur

2.4. Den entydige korde vil dog pr. definition indgå med omløbsretningen.

Vi kan nu definere den fundamentale kredsmatrix $C = (c_{ij})$ som en kreds-pil incidensmatrix af dimension $(m \times a)$, sådan at

$$(2.35) \quad c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ indgår i kreds nr. } i \\ & \text{med omløbsretningen} \\ -1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ indgår i kreds nr. } i \\ & \text{mod omløbsretningen} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi kan nu ligesom med A-matricen ordne søjlerne i kredsmatricen, sådan at de pile, der indgår i det udspændende træ, kommer først. Hvis vi yderligere nummererer basiskredsene efter deres definerende korder, fås

$$(2.36) \quad C = (C_S \quad C_C) = (C_S \quad I_C)$$

idet der jo netop indgår 1 korde i den i 'te basiskreds, og den pr. definition har positiv orientering i kredsen. Den fundamentale kredsmatrix for grafen i figur 2.4 er

$$\begin{array}{c} \\ C_5 \\ C_6 \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Heraf følger umiddelbart, at den fundamentale kredsmatrix har fuld rang, nemlig

$$(2.37) \quad \text{rang}(C) = \text{rang}(I_C) = m \quad .$$

Tallet m kaldes derfor også kredsringen eller det cyklomatiske tal for grafen D . Der gælder altså, at

$$(2.38) \quad \text{rang}(A) + \text{rang}(C) = (n-k) + m = a \quad ,$$

nemlig antallet af kanter i grafen.

Vi har hidtil udelukkende beskæftiget os med grafens fundamentale kredse, men vi kan jo i princippet definere kreds-pil incidensmatricer for alle tænkelige kredse i gra-

fen. For eksempel indeholder vores graf ovenfor også kredsen (2,4,5,6), der jo til mange formål kan være lige så god som de to andre. Her gælder imidlertid, at uanset hvilken kreds, vi udtager fra grafen, kan dens incidensrække findes som en linearkombination af rækkerne i den fundamentale kredsmatrix. En incidensrække for den nævnte, ikke-fundamentale kreds kan fx fås, hvis vi trækker C_5 -rækken fra C_6 -rækken ovenfor. Vi siger derfor, at rækkerne i den fundamentale kredsmatrix udspænder grafens kredsrum.

Vi skal i resten af denne rapport bruge betegnelsen "en kredsmatrix for grafen" om en vilkårlig matrix C af rang m , der kan frembringes ved additive rækkeoperationer på en fundamental kredsmatrix.

2.5.5. Den fundamentale nulrelation

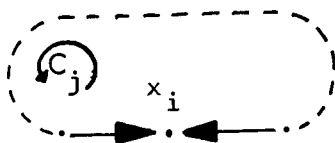
Grundlaget for stort set al analyse af netværk er følgende sammenhæng imellem A - og C -matricerne. Den kaldes også den fundamentale nulrelation:

$$(2.39) \quad A C^t = 0 \quad .$$

Da relation (2.39) er så central, skal en udledning af den gennemgås. Det er tilstrækkeligt at vise, at skalarproduktet $a_i c_j$ er nul for en vilkårlig række a_i i A og søjle c_j i C^t . Til en start kan vi notere, at rækken a_i kun indeholder tal forskellige fra nul i celle (i,k) , hvis pil nr. k berører punkt nr. i . Hvis kreds nr. j derfor ikke indeholder punktet i , vil skalarproduktet være nul. Hvis kreds nr. j derimod indeholder punktet i , udnytter vi, at at ethvert punkt i i en fundamentalkreds har netop to incidente pile. Hvis disse pile begge er orienteret ind i eller ud af punktet, vil de have samme fortegn i a_i -rækken. Men i så fald må de indgå med modsat fortegn i fundamentalkredsen, som det fremgår af figur 2.5.

Figur 2.5.

To pile, der er incidente til både et punkt og en kreds



De to indgående led i skalarproduktet vil derfor have modsat fortegn og ophæve hinanden, sådan at skalarproduktet bliver nul. Omvendt, hvis de har forskellige fortegn i a_i -rækken, vil de have samme fortegn i c_j -søjlen, og skalarproduktet er atter nul.

Den fundamentale nulrelation (2.39) giver os en nem måde at finde f-kredsmatricen på, idet

$$\begin{aligned}
 (2.40) \quad A C^t &= 0 && \Leftrightarrow \\
 (A_S \ A_C) \begin{pmatrix} C^t \\ I_C^S \end{pmatrix} &= 0 && , \text{ jf (2.36),} \\
 A_S C_S^t + A_C &= 0 && \Leftrightarrow \\
 C_S^t &= -(A_S)^{-1} A_C && .
 \end{aligned}$$

Den samlede C-matrix findes ved at enhedsmatricen I_C føjes til C_S .

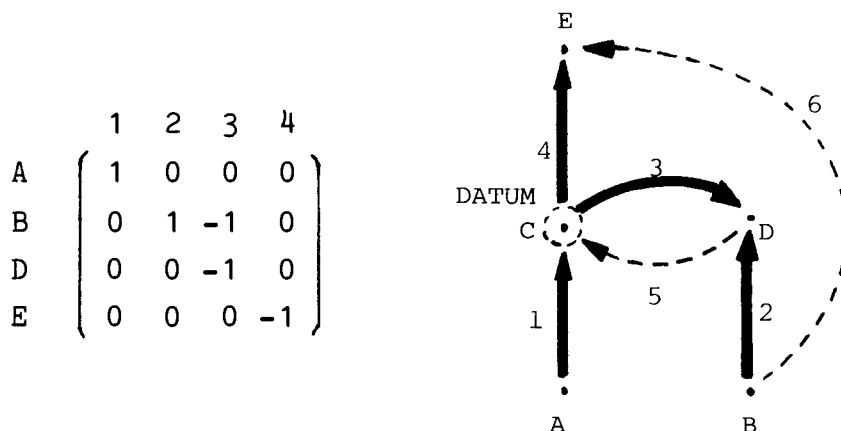
Den inverterede basismatrix A_S^{-1} betegnes B_S . Nu var (2.39) næppe en god måde at finde kredsmatricen på, hvis det var nødvendigt at invertere A_S , men det er så heldigt, at B_S -matricen kan tolkes som en incidensmatrix imellem pilene og vejene fra et givet punkt til referencepunktet igennem træet:

Vi husker, at i et træ findes en og kun en (ikke nødvendigvis ensrettet) vej mellem to vilkårlige punkter, og at vi valgte en reference for træet ved at stryge en række i den udvidede incidensmatrix, jf. afsnit 2.5.1. Vi betragter nu vejen fra et givet punkt x_i igennem træet til referencepunktet (datumvejen) og vedtager, at en pil indgår med positiv orientering, hvis den peger mod referencen, og med negativ orientering, hvis den peger væk fra referencen (mod

x_i). Datumvejsmatricen B_S kan nu defineres som en $((n-1) \times (n-1))$ -matrix (b_{ij}) , hvor

$$(2.33) \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ indgår positivt i} \\ & \text{datumvejen} \\ -1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ indgår negativt} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

For vores velkendte graf fås datumvejsmatricen



Det er en ganske enkel sag at finde B_S -matricen ved en algorithrisk afsøgning af vejene igennem træet, jf Brannin(1977) eller Franksen (1978a), hvor beviset for fortolkningen af B_S også findes.

2.5.6. Snitsæt og snitsætmatricen

Et snitsæt i en graf D ("cut-set") er en samling af kanter, hvis fjernelse fra grafen vil øge antallet af sammenhængskomponenter med netop 1. Vi erindrer, at

$$a = m + n - k \quad ,$$

hvor a er antallet af kanter i grafen, n er antallet af knudepunkter og k er antallet af sammenhængskomponenter. Et snitsæt S er altså en mængde af kanter, hvis fjernelse fra grafen vil øge værdien af k med 1.¹⁴⁾ For en sammenhængende graf er k som bekendt lig med 1. Fjernelsen af et snitsæt fra en sammenhængende graf vil følgelig medføre, at grafen deles i to sammenhængskomponenter. Vi erindrer, at sammen-

14. Denne definition er givet af Whitney(1933) og bruges meget af elektroingeniører. Se fx. Bryant(1967) for en mere generel definition og diskussion af snitbegrebet.

hængskomponenterne i en graf er en klassesdeling af grafens punkter. Selv om et snitsæt er en mængde af kanter, angives det derfor ofte som en klassesdeling af grafens punkter i to komplementære delmængder: Til enhver sådan klassesdeling af punkterne svarer et entydigt snitsæt og omvendt. Dette betyder bl. a., at de kanter, der er incidente til et givet punkt x_i , vil udgøre et snitsæt - nemlig svarende til klassesdelingen (x_i) og (øvrige punkter).¹⁵⁾ Bemærk, at et snit, der fx deler grafen i 3 komponenter, ikke er et snitsæt ud fra Whitneys definition. Der er selvfølgelig et utal af mulige måder, man kan udtage et snitsæt på, og vi skal forsøge nærmere at indkredse dette tal.

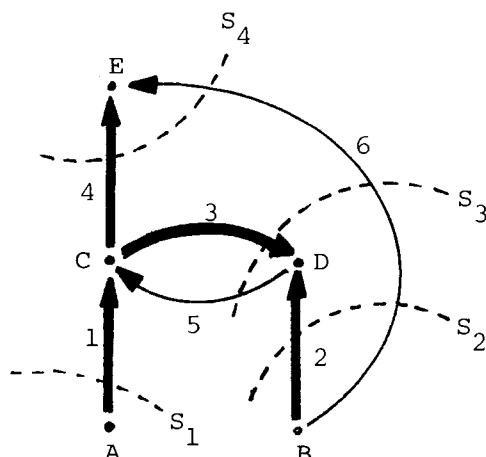
Til en start kan vi gøre den observation, at for et givet træ i grafen må et snitsæt indholde mindst en trægren. Et træ var jo en udspændende udspændende delgraf for D , så en opdeling af D i to komponenter må kræve, at mindst en trægren snittes over. Dette giver os ideen til en systematisering af de forskellige mulige snitsæt på samme måde som vi systematiserede kredsene ved hjælp af begrebet en fundamentalkreds.

Vi vælger derfor at definere et fundamentalt snitsæt som et snitsæt, der indeholder netop en trægren og et ukendt antal korder. Dette snitsæt vil være entydigt, hvilket ses som følger: Når en trægren fjernes fra træet, deles det i to dele. Den del, der indeholder referencen, kalder vi datumtræet eller stammen, og den anden del kaldes trækronen. De øvrige kanter i snitsættet vil nu være den veldefinerede mængde af pile, der har det ene endepunkt i stammen og det andet endepunkt i kronen. Orienteringen af snitsættet kan arbitrært (men bedrevidende) vælges sådan, at den definerende trægren har positiv orientering. En pil i snitsættet har da positiv orientering, hvis den har begyndelsespunkt i samme deltræ som trægrenen, negativ ellers.

Antallet af fundamentale snitsæt er følgelig $(n-1)$, nemlig antallet af trægrene.¹⁶⁾

15. Dette forudsætter dog, at punktet ikke er et hængsel, jf fx Frank Nielsen(1981)
16. Vi må dog huske, at dette kun gælder for et givet valg af træ, idet der kan vælges det(AA^v) forskellige træer.

Figur 2.6. En graf og dens fundamentale snitsæt



Vi kan nu definere den fundamentale snitsætmatrix som matricen $S = (s_{ij})$, hvor

$$(2.42) \quad s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ indgår i snitsæt i} \\ & \text{med positiv orientering} \\ -1, & \text{hvis pil nr. } j \text{ indgår i snitsæt i} \\ & \text{med negativ orientering} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Hvis snitsættene nummereres parallelt med de definerende trægrene, fås at

$$(2.43) \quad S = (S_s \ S_c) = (I_s \ S_c) .$$

Den fundamentale snitsætmatrix S har således fuld rang = $n-1$. For vores eksempel fås den fundamentale snitsætmatrix

$$\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ligesom i tilfældet med kredsmatricen ovenfor siges rækkerne i den fundamentale snitsætmatrix S at udspænde snitrummet for grafen, dvs at incidensrækken for et vilkå-

ligt snitsæt kan findes ved additive rækkeoperationer på S -matricen. Vi skal i det følgende bruge betegnelsen "snitsætmatrix for en graf" om en vilkårlig matrix af rang $(n-1)$, der kan frembringes ved rækkeoperationer på en fundamental snitsætmatrix.

Bemærk den slående dualitet imellem snitsætmatricen og kredsmatricen, idet trædelen af snitsætmatricen er en enhedsmatrix og co-trædelen af kredsmatricen er en enhedsmatrix. Denne dualitet skal undersøges nærmere i næste afsnit.

2.5.7. Strukturmatricernes dualitetsforhold

Matricerne A, C og S indeholder hver for sig en algebraisk repræsentation af grafens struktur. Dette tyder på, at der må kunne udvikles en præcis sammenhæng imellem de tre strukturmatricer. Vi har allerede set sammenhængen imellem f -kredsmatricen og incidensmatricen, og denne kan udvides til også at omfatte f -snitsætmatricen. Det gælder nemlig generelt, at snitsætmatricer og kredsmatricer er ortogonale ligesom incidens- og kredsmatricerne:

$$(2.44) \quad S C^t = 0 .$$

Da et f -snitsæt består af netop en trægren og et ukendt antal korder, og en f -kreds omvendt består af netop en korde og et ukendt antal trægrene, er det indlysende, at de eneste mulige fælles kanter for snitsæt i og kreds j er hhv den definerende trægren og den definerende korde. Og hvis et f -snitsæt har den definerende trægren fælles med en f -kreds, må det nødvendigvis også indeholde kredsens definerende korde, idet enhver kreds må snittes to steder for at den deles i to komponenter. Hvis de to fælles kanter har samme orientering i kredsen, må de have modsat orientering i snitsættet og omvendt. Derfor vil deres bidrag til skalarproduktet udligne hinanden, som det var tilfældet med incidens- og kredsmatricernes skalarprodukt. Da vilkårlige snitsæt- og kredsmatricer kan skrives som linearkombinationer af de tilsvarende fundamentale matricer, gælder ortogo-

naliteten naturligvis også for disse ikke-fundamentale matricer.

Vi får umiddelbart af (2.44) og (2.36) at

$$\begin{aligned}
 (2.45) \quad S C^t &= 0 \\
 (I_S \ S_C) \begin{pmatrix} C^t \\ I_C^c \end{pmatrix} &= 0 & \Leftrightarrow \\
 S_C &= -C_S^t & \Leftrightarrow .
 \end{aligned}$$

Ved indsættelse af (2.36) i (2.31) fås

$$(2.46) \quad S_C = B_S A_C .$$

Da $B_S = (A_S)^{-1}$, så $B_S A_S = I_S = S_S$, fås generelt, at

$$(2.47) \quad S = B_S A .$$

Dette er i overensstemmelse med den observation, vi gjorde ovenfor: Mængden af kanter, der er incidente til et givet punkt, udgør et snitsæt. Hver enkelt række i incidensmatrixen kan derfor opfattes som incidensrækken for et ikke-fundamentalt snitsæt. Da en sådan incidensrække kan findes som en linearkombination af rækkerne i den fundamentale snitsætmatrix, er det i grunden ikke overraskende at finde en entil-en sammenhæng som (2.47). Det interessante i denne forbindelse er den elegante grafteoretiske fortolkning af B-matricen, der viser at sammenhængen er etableret via et udspændende træ for grafen.

Vi kan kort sammenfatte incidensrelationerne mellem punkter, snitsæt, pile og kredse i følgende diagram:

	K a n t e r	
	træ (n-1)	co-træ (m)
f-snitsæt (n-1)	I_s	$S_c = -C_s^t$
f-kredse (m)	$C_s = -S_c^t$	I_c

Algebraisk kan de viste incidensrelationer udtrykkes på den måde, at snitrummet af dimensionen (n-1) og kredsrummet af dimensionen m er ortogonale underrum af R^a (opfattet som den mængde af vektorer, vi kan danne ved at tilknytte vilkårlige reelle tal til kanterne i grafen.¹⁷⁾

Da strukturmatricerne blot er alternative måder at repræsentere den samme information på, er det abstrakt set ligegyldigt, hvilken af dem, vi anvender. Der kan dog være stor forskel på det regnearbejde, de forskellige repræsentationer indebærer, afhængigt af grafens konkrete udseende, fx antallet af punkter og pile. Dette skal vi vende tilbage til i kapitlerne om netværksteori.

17. Formuleringen er faktisk mere generel, idet vi på intet tidspunkt har brugt andre kompositionsregler end + (addition) og - (subtraktion). Formuleringen omfatter derfor ikke blot elementer i et vektorrum, men elementer i en vilkårlig additiv gruppe, jf Branin(1977)

3. NETVÆRK

I dette kapitel defineres begrebet et netværk, og vi præsenterer nogle almindelige typer af netværksproblemer. Derefter defineres en strømning i et netværk, og det vises, at de forskellige problemtyper alle kan opfattes som specialtilfælde af det såkaldte "min cost cirkulationsproblem". Dette problem har en karakteristisk dual struktur, som vi kan udnytte til at definere et generelt sæt af begreber. Disse begreber kan anvendes med stor styrke på alle slags strømningproblemer - som fx input-output modeller og elektriske netværksproblemer.

De tre sidste afsnit af dette kapitel hører til de sværest tilgængelige i denne rapport. Disse afsnit, om "Out-of-kilter" algoritmen og dens generaliseringsmuligheder, er medtaget i rapporten for at påvise den glidende overgang fra "min cost" cirkulationerne i den operationsanalytiske tradition til fx Roth's opfattelse af det elektriske netværksproblem, som vi vender tilbage til i det lettere tilgængelige kapitel 6. Afsnittene kan læses kursorisk i første omgang, idet begreberne gennemgås igen i kapitlet om elektriske netværk.

3.1. Hvad er et netværk?

Et netværk er en orienteret graf (X,K) , i hvilken der til hver pil er knyttet en eller flere numeriske værdier - de såkaldte vægte.¹⁾ Netværksbegrebet kan opfattes som en generalisation af begrebet en orienteret graf, idet et netværk, hvori samtlige tilknyttede vægte er ettaller, vil være en orienteret graf. Men det er nu nok mere korrekt at sige, at ethvert netværk har en underliggende orienteret graf, som vi kan finde ved at erstatte netværkets vægte med ettaller - eller rettere med den logiske værdi "sand". Den underliggende graf kan siges at repræsentere netværkets

1. Et netværk kaldes undertiden en vægtet graf

kvalitative eller strukturelle egenskaber - i modsætning til de egenskaber, der afhænger af vægtenes numeriske størrelser.²⁾ Netværkets vægte w_{ij} kan opstilles i en vægtmatrix N , der defineres analogt til den logiske nabomatrix ved³⁾

$$(3.1) \quad n_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{hvis pil } (i,j) \text{ tilhører netværket} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .$$

Der er dog en lille begrebsmæssig forskel, idet diagonalen pr. definition var nul i den logiske nabomatrix (fordi vi a priori udelukkede sløjfer fra grafen). I netværksteorien kan sløjfer imidlertid have teoretisk relevans, og derfor skal vi i det følgende tillade diagonalelementerne n_{ii} at være forskellige fra nul.

En metode, der er meget anvendt i fx elektrisk netværksteori, er at hver vægt w_{ij} gives et entydigt nummer $k=1..a$, hvorefter vægtene opstilles i en "stykliste", dvs en lang vektor w af dimensionen $(a \times 1)$ (a er antallet af pile i den underliggende graf) . Herefter diagonaliseres w -vektoren i en $(a \times a)$ -matrix, som vi skal betegne \hat{w} . Hvis søjlerne i udmatricen \bar{G}_u og indmatricen \bar{G}_i indekseres på samme måde som vægtene, kan netværkets vægtmatrix findes af

$$(3.2) \quad N = \bar{G}_u \hat{w} \bar{G}_i^t .$$

Styklisten w og strukturmatricerne \bar{G}_u og \bar{G}_i rummer al information om netværkets opbygning. Bemærk, at den numeriske information alene ligger i w -vektoren, mens den logiske information om grafens struktur ligger i matricerne \bar{G}_u og \bar{G}_i .

Vi skal senere udlede alternative måder at repræsentere netværkets struktur på, men de kan alle på en eller anden måde reduceres til bestanddelene w , \bar{G}_u og \bar{G}_i .

2. Hvis netværket har mere end en vægt tilknyttet hver pil (fx en $(k \times 1)$ -vektor pr. pil), siges netværket at være af type k . Det vil i så fald have k underliggende grafer. Her kan det være en fordel at definere den underliggende supergraf som unionen af de k underliggende grafer. Bemærk, at det kan være nødvendigt at skelne mellem kanter, der ikke eksisterer, og kanter, der har vægten nul
3. Hvis der er k vægte pr kant, kan vi opstille k vægtmatricer - eller rettere en tredimensional "matrix" (tensor) af dimensionen $(n \times n \times k)$

Vi kan nu definere en række numeriske eller numerisk afledte begreber, der er analoge til de logiske begreber, vi udviklede i forrige kapitel. For eksempel kan vi definere udvægten w_u og indvægten w_i som vektorerne af hhv. række- og søjlesummer i vægtmatricen N . Vi har altså

$$(3.3) \quad w_u = \bar{G}_u w = N i$$

og

$$(3.4) \quad w_i = \bar{G}_i w = N^t i \quad .4)$$

Nok så vigtigt er det imidlertid at afgøre, hvilket numerisk begreb, der skal modsvare de logiske begreber kardinalitet ("længde") af en vej og afstand. Det på en gang overraskende og selvindlysende svar på dette spørgsmål er, at vi ikke kan sige noget generelt om det. Valget at længde- og afstandsbegreber i et netværk må afhænge af, hvilken empirisk fortolkning vi giver netværkets vægte. Men når først dette valg er truffet, vil begrebsapparatet og metoderne fra kapitel 2 vise sig at være stærkt.

Antag for eksempel, at netværkets punkter repræsenterer forskellige udfald af et eksperiment, og at w_{ij} er sandsynligheden for, at hændelse j indtræffer, umiddelbart efter at hændelse i er indtruffet. I dette tilfælde vil det være naturligt at definere længden af en ensrettet tur fra i over h til j som produktet $w_{ih}w_{hj}$, sådan at længden af turen er lig med sandsynligheden for at observere hændelsesforløbet (i,h,j) , givet at i er indtruffet.

Antag som et andet eksempel, at knudepunkterne repræsenterer geografiske positioner, og at w_{ij} opfattes som en "omkostning" ved at passere direkte fra i til j (fx. en billetpris eller en rejsetid). Her er det naturligt at definere længden af turen (i,h,j) som $w_{ih}+w_{hj}$, nemlig den samlede omkostning ved at passere "ruten".

Som det sidste eksempel kan vi antage, at w_{ij} fortolkes som en kapacitet, dvs det maksimale antal enheder, der kan passere kanten (i,j) i et givet tidsrum. Her må vi sætte

4. Da \bar{G}_u og \bar{G}_i er summationsmatricer, er $\bar{G}_u^t i = \bar{G}_i^t i = i$, jf appendix 2. Ligning (3.3) og (3.4) følger da af (3.2)

længden af turen (i,h,j) til $\min(w_{ih}, w_{hj})$, idet det maksimale antal enheder, der kan passere turen, er givet ved den mindste af de indgående kapaciteter.

Disse tre eksempler skulle imidlertid være nogenlunde dækkende for de fleste empiriske problemer, og vi skal derfor kort gennemgå de tre typer netværk som standardtilfælde.

3.2. Hovedtyper af netværksmodeller*

Når vi har lagt os fast på valget af længdebegreb i et netværk, har vi i praksis defineret netværkets elementoperation. Vi husker fra afsnit 2.3, at den traditionelle metode til matrixbehandling af orienterede grafer forudsatte, at vi havde defineret en elementoperation og en reducerende operation. Vi skal benytte valget af karakteristisk elementoperation til at definere tre hovedtyper af netværk: det kapacitive, det additive og det multiplikative netværk, og vi skal give nogle eksempler på netværk af de tre typer. Vi skal senere i afsnit 3.3 se, hvordan alle de behandlede problemer har forbindelse med begrebet en "strøm" i et netværk. Afsnittet kan læses kursorisk.

3.2.1. Kapacitive netværk (transportnetværk)*

Når netværkets vægte w_{ij} fortolkes som kapaciteter, siger vi, at netværket er kapacitivt. Vægte, der opfattes som kapaciteter, betegnes i det følgende med bogstavet b (bounds). Kapacitive netværk kaldes også transportnetværk, fordi de er mest anvendt til løsning af transportproblemer, fx af varer langs ruter, af væske i rør eller af energi i ledninger. Vi så ovenfor, at i et kapacitivt netværk er det naturligt at definere længden af en tur $p = (i,h,j)$ som den mindste af de i turen indgående kapaciteter, altså

$$(3.5) \quad b(i,h,j) = \min(b_{ih}, b_{hj})$$

Enhver tur i et kapacitivt netværk vil altså have mindst en begrænsende pil (p,q) , sådan at kapaciteten af turen er lig

med b_{pq} . Dette har den lidt pudsige konsekvens, at kapaciteten af en vej godt kan være større en kapaciteten af en tur, der indeholder den pågældende vej, nemlig hvis den begrænsende pil for turen ligger i en kreds. Derimod kan kapaciteten af en vej aldrig være mindre end kapaciteten af en tur, der indeholder vejen.

Vi kan nu definere "kapacitetsafstanden" fra et punkt s til et andet punkt t som den maksimale kapacitet af en enkelt vej fra s til t . Vi kan finde kapacitetsafstandsmatricen ved hjælp af modificeret matrixmultiplikation på næsten samme måde som vi fandt afstandsmatricen i afsnit 2.3, punkt 3: Kapacitetsafstanden for ture af kardinalitet mindre eller lig med 2 vil således være

$$(3.6) \quad d_2(s,t) = \max_{h=1}^n (\min(b_{sh}, b_{ht}))$$

Ved induktion fås, at "kapacitetsafstandsmatricen" kan findes som N^n , idet vi anvender et modificeret skalarprodukt, defineret ved elementoperationen minimering og den reducerende operation maksimering.⁵⁾

Det er af afgørende betydning, at vi ved reduktionen (i (3.6) maksimeringen) altid vil kassere en tur, hvis begrænsende pil ligger i en ensrettet kreds. Hvis ikke en sådan tur altid kasseres, kan vi risikere at skulle finde en "længste omvej", og dette problem kan vi ikke uden videre løse, jf. afsnit 2.3, punkt 4. Det er således ikke umiddelbart muligt at finde en "minimum kapacitets" vej fra s til t . Vi skal vende tilbage til dette problem i afsnittet om additive netværk nedenfor.

Bemærk, at vi ikke umiddelbart kan sige noget om kapaciteten af en union af flere ture mellem to punkter s og t , selv om de indgående tures kapaciteter er kendte. Unionen af to ture kan have samme kapacitet som den af de to ture, der har mindst kapacitet, nemlig hvis de har en begrænsende pil fælles. Men unionen vil have større kapacitet end de indgående ture, hvis de ikke har en begrænsende pil fælles.

5. Jf afsnit 2.3. En mere effektiv metode til at finde den modificerede n 'te potens af N er Floyd-Warshall-metoden, jf. fx. Lawler(1976).

Teorien om, hvordan vi finder den samlede kapacitet af et sådant netværk af (s,t)-ture, kunne fylde et kapitel for sig. Vi skal senere berøre emnet i forbindelse med omtalen af strømme i netværk nedenfor. Se i øvrigt Lawler(1976) for en grundig gennemgang.

3.2.2. Additive netværk (omkostningsnetværk)*

Når netværkets karakteristiske elementoperation er addition, kaldes netværket et omkostningsnetværk eller et additivt netværk. Vægte, der opfattes som omkostninger ved at passere de respektive kanter, betegnes i det følgende med bogstavet c_{ij} . En meget bred klasse af netværksproblemer kan henføres til kategorien omkostningsnetværk. Vægtene c_{ij} kan fx også fortolkes som længder i kilometer eller (vente-)tid i timer.

Vi så i indledningsafsnittet, at i et omkostningsnetværk må længden af en tur $p = (i,h,j)$ defineres ved

$$(3.7) \quad c(p) = c_{ih} + c_{hj}$$

Vi kan nu definere omkostningsafstanden mellem to punkter s og t som længden af en omkostningsminimerende vej fra s til t . Ofte kaldes en sådan vej lidt misvisende for en "korteste vej" ("shortest path"). En "korteste vej" fra s til t kan findes ved modificeret matrixmultiplikation, hvis vi danner matricen D_1 ved at erstatte alle nuller uden for diagonalen i vægtmatricen med tallet uendeligt (som vi gjorde i afsnit 2.3, punkt 3). For en tur af kardinalitet mindre end eller lig med 2 kan vi finde omkostningsafstanden af

$$(3.8) \quad d_{st}^2 = \min_{h=1}^n (d_{sh}^1 + d_{ht}^1)$$

Nøjagtig som før finder vi ved induktion, at omkostningsafstandsmatricen kan findes som D_1^n , idet vi definerer "skalarproduktet" ved elementoperationen addition (+) og den reducerende operation minimering.

Hvis alle "omkostninger" er positive, er metoden problem-

fri. Dette skyldes igen, at ture med kredse vil blive elimineret ved reduktionen "min" (fordi en kreds altid vil have en positiv omkostning). Hvis vi imidlertid tillader nogle af vægtene at være negative, kan vi risikere, at der findes en kreds med negativ omkostning - en såkaldt eksploderende kreds. Hvis dette er tilfældet, har vi ikke længere et "korteste vej"-problem, men derimod et "længste omvej"-problem. Dette problem er matematisk veldefineret, og det kan som bekendt løses, men ikke ved hjælp af kendte, effektive metoder, jf. afsnit 2.3.

En meget benyttet type af omkostningsnetværk er såkaldte PERT-netværk (Project Evaluation and Review Technique), hvor pilene opfattes som dele af en arbejdsproces, og punkterne repræsenterer afslutningen af en delproces og den samtidige påbegyndelse af næste delproces. En pil går fra punkt i til punkt j , hvis igangsættelsen af delprojekt (i,j) er betinget af, at hændelsen i er indtruffet, og c_{ij} er den tid, det tager at fuldføre delproces (i,j) . Hovedproblemet i et PERT-netværk er ofte at bestemme den korteste tid, det samlede projekt kan færdiggøres på. Denne tid kan findes som den længste omkostningsomvej fra s (starten) til t (slutningen). Da et PERT-netværk nødvendigvis må være acyklisk, kan dette lige akkurat lade sig gøre med effektive metoder, se fx Lawler(1976).

3.2.3. Multiplikative netværk (signalgrafer)*

Multiplikative netværk er temmelig oversete i de fleste bøger om netværksoptimering.⁶⁾ Dette kan forekomme besynderligt, især på baggrund af, at ethvert lineært ligningssystem kan opfattes som et multiplikativt netværk. Et lineært ligningssystem kan skrives på formen

$$(3.9) \quad y = U y + V x \quad ,$$

hvor y er en vektor af endogene variable, x er en vektor af

6. Frank Nielsen(1981) er en undtagelse fra denne regel, idet denne bog indeholder et helt kapitel om signalgrafer.

eksogene (udefra givne) variable, og U og V er passende koefficientmatricer. Ligningssystemet (3.9) kan ækvivalent skrives

$$(3.10) \quad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Vektorerne y og x kan opfattes som variable, der er tilknyttet punkterne i et netværk, og den kombinerede koefficientmatrix i (3.10) kan opfattes som netværkets vægtmatrix (her dog transponeret). Læseren kan selv overbevise sig om, at den relevante længde af en tur (i,h,j) i dette netværk er produktet af de i turen indgående vægte. Hvis fx $y_1=3x_1$ og $y_2=2y_1+5x_1$, har turen (x_1,y_1,y_2) længden $3*2=6$, svarende til den effekt på y_2 af en ændring i x_1 , der går via y_1 . Tilsvarende har turen (x,y_2) længden 5. Den samlede effekt på y_2 af en ændring i x_1 er således $5+6=11$, svarende til summen af de to tures længder. En sådan grafteoretisk tolkning af lineære ligningssystemer kan gennemføres, også for indekomposable systemer, på en intuitiv og simpel måde. Vi skal dog ikke gøre det her, idet vi henviser til den udførlige gennemgang i Nielsen(1981).

I det multiplikative netværk har vi altså for $p = (i,h,j)$, at

$$(3.11) \quad a(p) = a_{ih}a_{hj}$$

Efter denne konstatering er det jo ret let at finde eksempler på multiplikative netværk. Ikke desto mindre skal en særlig type behandles nærmere, nemlig de stokastiske netværk.

Et stokastisk netværk er et netværk, hvori kanternes vægte repræsenterer sandsynligheder. Sådanne netværk anvendes fx inden for kommunikationssektoren, idet vægten p_{ij} kan være sandsynligheden for, at et signal sendt fra i til j bliver korrekt modtaget. Et vigtigt problem i denne sammenhæng er at bestemme den pålideligste kommunikationsvej mellem to punkter s og t . Dette kan gøres ved den efterhånden velkendte matrixmultiplikation, idet vi definerer "skalarproduktet" ved elementoperationen multiplikation og den reducerende operation maksimering (bemærk, at dette kun kan

lade sig gøre, hvis vægtene er sandsynligheder med værdier mellem 0 og 1. Ellers får vi "eksploderende kredse" , og så er vi tilbage i "længste omvej"-problemet).

En nok så vigtig type af stokastiske netværk er Markov-kæder. En Markov-kæde er et netværk, hvori punkterne repræsenterer udfaldsrummet for et stokastisk eksperiment, og vægtene p_{ij} er sandsynligheden for at udfald j realiseres, givet at udfald i realiseredes i forrige udførelse af forsøget. Systemet siges at være i tilstand j i det k 'te trin, hvis den k 'te udførelse af eksperimentet resulterer i udfald j . En Markov-kæde er altså et multiplikativt netværk, hvori alle vægte er sandsynligheder, og alle punkter har udgangsvægten 1, svarende til, at rækkesummerne i vægtmatricen er 1.⁷⁾ Markov-kædens vægtmatrix kaldes også overgangsmatricen, fordi den angiver sandsynligheden for at gå fra tilstand i direkte til tilstand j . Den k 'te potens af vægtmatricen indeholder i celle (i,j) sandsynligheden for at passere fra tilstand i til tilstand j i k trin. Metoden til analyse af et sådant netværk skulle efterhånden være velkendt.

En elementær, men dog rimeligt dækkende indføring i teorien om Markov-kæder er givet i Hadley og Kemp(1972), men en introduktion kan også fås ved en genlæsning af kapitel 2, idet følgende ordliste benyttes:

Grafteoretisk begreb	Statistisk begreb
punkt i	tilstand i
pil (i,j)	mulig overgang i til j
vægtmatrix	overgangsmatrix
kontrabasis	absorberende tilstande
stærk graf	ergodisk kæde
graf med terminaler	absorberende kæde
j tilgængelig fra i	j "accessible" fra i
stærkt sammenhængende punkter	kommunikerende tilstande

Grundigere behandling af Markov-kæder er givet i Jacobsen

7. Vægtmatricen (overgangsmatricen) for en Markov-kæde vil følgelig være en omfordelingsmatrix, jf. appendix 2

og Keiding(1982) eller standardhenvisningen Kemeny og Snell(1960).

3.3. Strømme i netværk

En meget vigtig anvendelse af netværksbegrebet fremkommer, når vi opfatter kanterne i netværket som "kanaler", ad hvilke der flyder en "strøm" af enheder af en eller anden art. Denne strøm kan være af varer, penge, kommunikationssignaler, væske, elektroner og meget andet.

Vi skal først definere begrebet en strøm. Derefter viser vi, hvordan begrebet en cirkulation fremkommer ved en mindre generalisering af strømbegrebet, og vi viser, hvordan de hidtil behandlede problemtyper kan opfattes som specialtilfælde af problemet at finde en omkostningsminimerende cirkulation.

3.3.1. Strømbegrebet i et åbent netværk

Næsten alle har en fornemmelse af, hvad en strøm er. Når det kommer til en præcis definition af begrebet, støder vi imidlertid på vanskeligheder, fordi begrebet anvendes på så mange vidt forskellige empiriske problemstillinger. Brugen af strømbegrebet er dog altid forbundet med en hyppighed, nemlig antallet af enheder, der skifter status eller tilstand i en given tidsperiode.

For at undgå omstændelige diskussioner om strømbegrebet vælger de fleste forfattere at definere en strømning ud fra dens abstrakte karakteristikum, nemlig at den opfylder en bevaringslov i hvert knudepunkt: Mængden af enheder, der strømmer ind i et knudepunkt, skal være lig med mængden af enheder, der strømmer ud af knudepunktet.⁸⁾ Hvis f er en vektor af kanttilknyttede strømme, kan denne betingelse normalt formuleres $\bar{G}_i f = \bar{G}_u f$, dvs at $\bar{A}f = 0$. Hvis netværket er

8. Her ser vi foreløbig bort fra muligheden af, at enheder kan akkumulere i punktet

åbent, dvs indeholder kilder eller terminaler,⁹⁾ må definitionen dog modificeres. I et sådant åbent netværk opfattes kilderne som de punkter, hvorigennem netværkets omverden sender en strøm af enheder ind i netværket, mens terminalerne opfattes som de punkter, hvorfra netværket leverer en strøm ud til omverdenen. Kilder og terminaler kaldes netværkets ydre punkter, resten kaldes indre punkter. Af bevaringsloven for netværkets indre punkter følger, at summen af strømme ind i netværket (indstrømningen) må være lig med summen af strømme ud af netværket (udstrømningen). Denne fælles sum kaldes strømningens størrelse.

En strømning i netværket kan derfor passende defineres som en $(ax1)$ -vektor f af vægte, der opfylder

$$(3.12) \quad Af = f_i - f_u \quad \text{og}$$

$$(3.13) \quad i^t f_u = i^t f_i = v(f) \quad .$$

hvor f_i og f_u er ortogonale vektorer af hhv. ind- og udstrømninger i hvert af de n knudepunkter, og skalaren $v(f)$ er strømningens størrelse, dvs det samlede antal enheder, der strømmer igennem netværket i perioden. Et åbent strømningensnetværk er vist i figur 3.1 (til hver af netværkets kanter er knyttet et talpar i parentes. Det første er kantens nummer, det andet er kantens strøm). Vektoren f_i vil have ikke-nul elementer for de punkter, der er kilder, og vektoren f_u vil tilsvarende have ikke-nul elementer for de punkter, der er terminaler.¹⁰⁾ Elementerne i f -vektoren kaldes slet og ret strømme.

3.3.2. Lukning af åbne netværk

Et netværk siges at være lukket, hvis det hverken har kilder eller terminaler. Undertiden kan det være en matema-

9. Vi husker, at en kilde er et punkt med indgangsvalensen nul, og en terminal omvendt er et punkt med udgangsvalensen nul

10. Undertiden defineres i stedet nettoindstrømningsvektoren som $f_n = f_i - f_u$, hvor $i^t f_n = 0$. Dette er dog uhensigtsmæssigt til vores formål ⁿ

tisk fordel at transformere et åbent netværk til et lukket netværk, inden strømmene behandles algebraisk. På denne måde kan en opdeling af matricerne og vektorerne efter kriteriet ydre og indre punkter ofte undgås. En strømning i et sådant lukket netværk kaldes en cirkulation. Lukningen af et åbent netværk og den tilsvarende konvertering af en strømning til en cirkulation foregår imidlertid på forskellige måder i den elektriske og i den kombinatoriske tradition.

I elektrisk litteratur lukkes netværket ved, at der føjes et ekstra knudepunkt til netværket. Det ekstra knudepunkt repræsenterer netværkets omverden og kaldes det universelle punkt. For at opretholde denne fortolkning må vi føje en række nye pile til netværket: En fra det universelle punkt til hvert af de punkter, der har en indstrømning, og en fra hvert punkt, der har en udstrømning, til det universelle punkt. I figur 3.1 er vist et åbent netværk og dets tilsvarende lukkede netværk efter den elektrotekniske tradition.

Da da det åbne netværks indstrømning var lig med dets udstrømning, vil bevaringsloven automatisk være opfyldt for ethvert punkt i det lukkede netværk - inklusive det universelle punkt. Strømningens størrelse i det åbne netværk vil svare til strømmen igennem det universelle punkt i det lukkede netværk.

Sædvanligvis udnævnes det universelle punkt herefter til "jord", dvs referencepunkt, sådan at dets række i den udvidede incidensmatrix \bar{A} slettes, jf afsnit 2.5, punkt 1. Resultatet af alle disse operationer er altså følgende: Vi føjer en ny række og et antal nye søjler til incidensmatricen, hvorefter rækken stryges igen, sådan at der netto er tilføjet et antal nye søjler. Gevinsten er, at incidensmatricen nu har fuld rang: Søjlesummerne vil stadig være nul for de oprindelige pile, men søjlerne for de tilføjede pile vil summe til -1 (hvis de udgår fra referencen) eller 1 (hvis de går til referencen).

Inden for optimeringsteorien følges en lignende, men dog lidt forskellig procedure, idet der oprettes to nye punkter: En fælles kilde (s) med udgående pile til hver af de oprindelige kilder og en fælles terminal (t) med indgående pile fra hver af de oprindelige terminaler. Til sidst oprettes en

Figur 3.1. Et åbent strømingsnetværk og dets lukning.

 \bar{A} (åben):

	1	2	3	4	5	6
A	1	0	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0	1
C	-1	0	1	1	-1	0
D	0	-1	-1	0	1	0
E	0	0	0	-1	0	-1

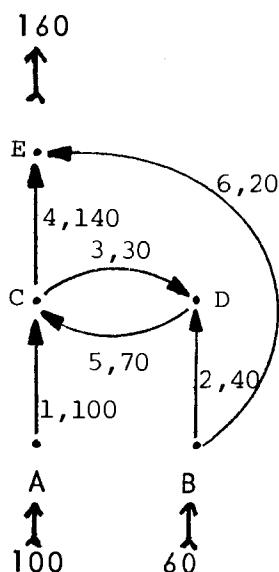
$$f = (100, 40, 30, 140, 70, 20)$$

$$\bar{A}f = (100, 60, 0, 0, -160)$$

$$f_i = (100, 60, 0, 0, 0)$$

$$f_u = (0, 0, 0, 0, 160)$$

$$v(f) = 160$$

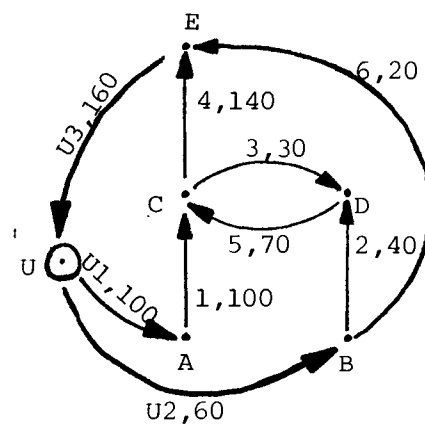
 \bar{A} (lukket):

	U1	U2	1	2	3	4	5	6	U3
A	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
B	0	-1	0	1	0	0	0	1	0
C	0	0	-1	0	1	1	-1	0	0
D	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0
E	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1
U	1	1	0	0	0	0	0	0	-1

$$q = (100, 60, 100, 40, 30, 140, 70, 20, 160)$$

$$q_i = (100, 60, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$q_u = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 160)$$

 A (lukket):

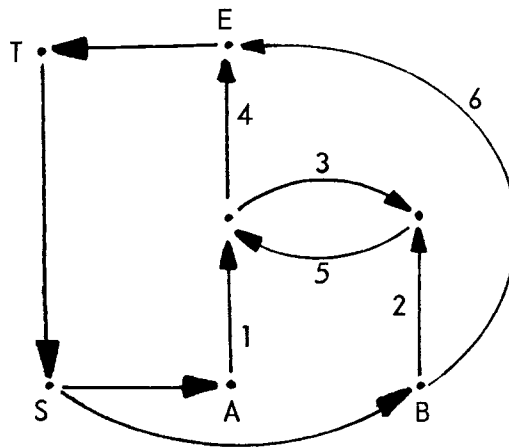
	U1	U2	1	2	3	4	5	6	U3
A	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
B	0	-1	0	1	0	0	0	1	0
C	0	0	-1	0	1	1	-1	0	0
D	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0
E	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1

$$Aq = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$Aq_i = (-100, -60, 0, 0, 0)$$

$$Aq_u = (0, 0, 0, 0, 160)$$

Figur 3.2. En alternativ lukning



"baglæns" pil fra "fællesterminalen" til "fælleskilden", og netværket er lukket som vist i figur 3.2. Da denne metode betyder tilføjelse af et punkt og en pil mere end den elektriske metode, skal vi foretrække den elektriske.¹¹⁾

3.3.3. Cirkulationer i lukkede netværk

Efter disse øvelser kan vi definere en cirkulation i et lukket netværk som en vektor q , der opfylder

$$(3.14) \quad A q = 0$$

hvor A er en (reduceret) incidensmatrix for det lukkede netværk. Betegnelsen en cirkulation stammer fra det forhold, at vektoren q vil tilhøre kredsrummet for det lukkede netværks graf, jf afsnit 2.5, punkt 4 (kredsrummet for en graf kaldes derfor også dens strømrum). Dette kan fx ses af, at (3.14) er ensbetydende med, at der eksisterer en entydig m -vektor af "kredsstrømme" q_m , sådan at

$$(3.14.b) \quad q = C^t q_m, \quad ,$$

11. Hvis der kun er en enkelt kilde og en enkelt terminal i det oprindelige netværk, opfatter vi simpelt hen kilden og terminalen som det samme punkt og udnævner det til reference

hvor C er en kredsmatrix for grafen.¹²⁾ Dette kan lettest ses, hvis C -matricen er en fundamental kredsmatrix for grafen. I så fald er $q_m = q_c$ (strømmene i grafens co-træ, da $C_c = I_c$), og udledningen af (3.14.b) er da helt parallel med udledningen af (2.40). Sammenhængen den anden vej følger umiddelbart af den fundamentale nulrelation $AC^t = 0$, når (3.14.b) multipliceres med A .

Cirkulationen q kan skrives

$$(3.15) \quad q = (f_i, f, f_u)$$

(se figur 3.1), hvor f_i er strømmene i de tilføjede pile fra referencen til det egentlige netværk, f er strømmingen i det egentlige netværk, og f_u er strømmene i de tilføjede pile til referencepunktet (f_i og f_u i (3.15) består altså af de elementer fra ind- og udstrømningsvektorerne i (3.12), der er forskellige fra nul). Lukningen af netværket svarer således blot til, at vi flytter højresiden i (3.12) over på venstresiden. Størrelsen af strømmingen svarer nu til cirkulationen igennem referencepunktet, og den findes af

$$(3.16) \quad v(q) = g_r q \quad ,$$

hvor g_r er referencepunktets række i den udvidede udmatrix \bar{G}_u (mao den række vi slettede, da vi udnævnte r til reference. Læseren kan selv overbevise sig om, at vektoren g_r i (3.16) summerer vægtene for de pile, der går ind i referencen).¹³⁾

Et meget ofte forekommende netværksproblem er at finde en cirkulation q , der minimerer en eller anden funktion af q under nogle bibetingelser, typisk et problem af formen

12. I elektrisk netværksteori kaldes elementerne i q_m "maskestrømme"

13. Vektoren g_r kan eventuelt erstattes af $(i^t - i^t G_u)$. Vi kunne for den sags skyld også have defineret g_r som den tilsvarende række fra indmatricen \bar{G}_i , men vi har arbitrært valgt at bruge udmatricen

$$\begin{aligned}
 & \text{minimer } c^t q \\
 & \text{under bibetingelserne} \\
 (3.17) \quad & Aq = 0 \\
 & \text{og} \\
 & Uq \geq b
 \end{aligned}$$

Dette "min cost" cirkulationsproblem ses at være et lineært programmeringsproblem med to slags restriktioner.

Den første type restriktion er en ækvivalens, og den skal være overholdt, for at vektoren q overhovedet kan kaldes en cirkulation. Denne restriktion kan opfattes som mængden af de begrænsninger, netværkets struktur lægger på strømmene q . Disse bånd kaldes i fysisk litteratur de primale tvangsbindinger, og de svarer til såkaldte "identiteter" eller "bogholderiligninger" i økonomisk litteratur.

Den anden type restriktion er generelt et sæt af uligheder, men de kan specielt være et sæt af ækvivalenser. Disse uligheder opfattes som de bindinger, den enkelte kants natur lægger på strømmen igennem den, og de angiver kanternes "overføringsegenskaber" eller "adfærdsrelationer". Det er karakteristisk for adfærdsrelationer, at de aldrig holder eksakt, men derimod kun gælder med en vis tilnærmelse, i modsætning til identiteterne, der skal holde præcist. Da adfærdsrelationerne normalt er knyttet til kanterne, vil U -matricens rækkedimension som regel være lig med antallet af kanter i netværket. Hvis U -matricen fx er en positiv eller negativ enhedsmatrix, kan vektoren b opfattes som hhv. nedre eller øvre kapacitetsgrænser på strømmen igennem kanten.

Koefficienterne c_{ij} i målfunktionen kan bedst opfattes som omkostninger ved at en enhed strøm flyder igennem kant (i,j) . Derfor kaldes en løsning af problemet (3.17) også en "min cost" cirkulation.

Normalt vil problemet (3.17) være defineret for et netværk af type 3, nemlig med en strøm, en enhedsomkostning og en kapacitetsgrænse pr. kant (i,j) . Et problem af typen (3.17) kan således siges at sammenfatte egenskaberne ved kapacitive, additive og multiplikative netværk, og det er derfor ikke så specielt, som det umiddelbart kan synes at være. Faktisk kan en meget bred klasse af problemer henføres

til denne kategori. Dette hænger sammen med, at måske alle netværksproblemer kan relateres til begrebet en strøm, fordi en vej i et netværk kan opfattes som en strøm af størrelsen 1.¹⁴⁾

For eksempel kan en "korteste vej" i et netværk findes som en strøm af størrelsen 1, der minimerer summen af de omkostninger, den passerer. Dette svarer til, at vi specificerer U og b i (3.17) sådan, at $q \geq 0$ og $g_r q = 1$.

Et kendt problem af typen (3.17) er at finde den maksimale størrelse af strømmingen igennem et netværk med øvre kapacitetsgrænser u , jf. afsnit 3.2. Dette svarer til, at vi sætter $c = -g_r$ i målfunktionen, sådan at $-c^t q$ er referencens gennemstrømning. I sådanne "max flow"-problemer vil de nedre grænser normalt være nul.¹⁵⁾

Et kendt makroøkonomisk problem af typen (3.17) er det klassiske Hitchcock-Koopmans transportproblem, jf. fx. Koopmans (1951), Dorfman et al (1958).¹⁶⁾ I transportproblemets åbne formulering fortolkes knudepunkterne som byer, og nettoindstrømningerne $f_n = (f_i - f_u)$ som byernes overskudsefterspørgsel af en given vare (summeret over alle byer skal den være nul, jf. (3.12)). Matricen U er en negativ enhedsmatrix, og kapaciteten b_{ij} er udskibningskapaciteten fra by i til by j , og c_{ij} er omkostningerne ved at sende en vareenhed fra by i til by j . Problemet kan lukkes ved, at vi opretter et referencepunkt, der leverer overskudsudbudet (og modtager det tilsvarende underskud). Transportproblemet er da et "min cost" cirkulationsproblem, og dets løsning er en optimal transportstruktur.

3.3.4. Cirkulationsproblemer og dualitet

Et "min cost" cirkulationsproblem er som nævnt ovenfor et lineært programmeringsproblem, og ethvert lineært programmeringsproblem har som bekendt et dualt problem. Det duale

14. Denne fortolkning hænger dog på, om strømningsproblemet har en heltallig løsning, se fx Lawler(1976).
15. Formuleringen kan udvides til at omfatte kapacitetsgrænser u_n i netværkets knudepunkter. I så fald tilføjes ekstra bibetingelser af formen $-G_i q \geq -u_n$.
16. En interessant elektrisk netværks-analogi til transportproblemet er givet i Franksen(1978b)

problem kan opfattes som en alternativ matematisk repræsentation af reelt den samme fysiske situation, som det primale problem beskriver. Hvis læseren ikke har teorien om dualitet i programmeringsproblemer present, er en kort indføring givet i appendix 1.

I forbindelse med "min cost" cirkulationsproblemer har dualiteten en række særlig elegante anvendelser. Disse anvendelser kan på en måde siges at være emnet for resten af denne rapport, idet de danner grundlag for det udviklede begrebsapparat. Vi skal derfor ofre en del plads på opstilling og fortolkning af duale cirkulationsproblemer. Til dette formål tager vi udgangspunkt i den operationsanalytiske standardudgave af "min cost" cirkulationsproblemet, hvor hver kant er karakteriseret ved en strøm, en omkostning og to kapacitetsgrænser (en øvre og en nedre).¹⁷⁾ Et sådant standardproblem og dets duale problem er

	Primal:	Dual:
	Minimer	Maksimer
(3.18.a)	$c^t q$	$s_1^t l - s_2^t u$
	under	under
(3.18.b)	$Aq = 0$	p fri
(3.18.c)	$q \geq l$	$s_1 \geq 0$
(3.18.d)	$-q \geq -u$	$s_2 \geq 0$
(3.18.e)	q fri	$p^t A + s_1^t - s_2^t = c^t$

Det duale problem ses at indeholde to "slack"-variable, som vi senere skal eliminere, samt en knudepunktstilknyttet variabel p . Mens slack-variablene skyldes den konkrete udformning af kanternes "adfærdsrelationer", er p -variablen tydeligvis til stede i alle duale cirkulationsproblemer. Med andre ord: Så snart vi har en strøm i et netværk, har vi også en dual, knudepunktstilknyttet variabel, som vi i det følgende skal kalde spændingsvariablen. Denne spændingsvariabel kan altid gives en naturlig fortolkning, afhængigt af den fysiske karakter af den primale strømning. Vi skal se

17. Se fx Lawler (1976)

nogle eksempler.

Hvis netværket tænkes at repræsentere et lukket rørsystem, og den primale variabel opfattes som en cirkulation af væske i rørene, kan den duale variabel p fortolkes som væsketrykket i rørenes samlingspunkter. Eller cirkulationen kan opfattes som en varmemstrøm, sådan at den duale variabel bliver temperaturen i samlingspunkterne. Netværket kan også opfattes som ledninger, der bærer en elektrisk strøm. Den duale variabel er da det elektriske potentiale (spændingen) i knudepunkterne. Til sidst skal nævnes, at netværket kan opfattes som vaneskabte distributionskanaler af varestrømme fra den ene konto (eller agent) til den anden i et økonomisk system. Den duale variabel er da varernes (skygge-)priser.

Vi noterer imidlertid, at knudepunktsvariablen p ikke indgår direkte, idet den først relateres til kanterne via transformationen $v^t = p^t A$. Da søjlen i incidensmatricen for kanten $k=(i,j)$ typisk vil indeholde et ettal for den pågældende kants startpunkt i og et negativt ettal for dens slutpunkt j , kan den kanttilknyttede duale variabel $v_{ij} = p_j - p_i$ fx fortolkes som "trykforskellen" mellem rørets to endepunkter, idet kantens orientering angiver dens positive retning (vi skal i det følgende anvende dobbeltindekseringen " v_{ij} " i stedet for den mere korrekte, men omstændelige notation " v_k , k går fra i til j ").

Undertrykkelsen af referencepunktets række i \bar{A} -matricen svarer således til, at referencepunktets "tryk" p_r a priori tildeles værdien nul. Der findes utallige fysiske eksempler på sådanne valgte referencer, fx at højde=0 ved vandoverfladen, tiden=0 ved Kristi fødsel og temperatur=0 ved vandets frysepunkt.

Af den fundamentale nulrelation $AC^t=0$ fås, at

$$(3.19.a) \quad v^t = p^t A$$

=>

$$(3.19.b) \quad v^t C^t = 0 \quad ,$$

hvor C er en vilkårlig kredsmatrix for netværkets graf. Vi får altså de duale tvangsbindinger til (3.14), nemlig at **spændingsvariablen i et netværk tilhører snitrummet for dets graf**, jf kapitel 2, punkt 5.6 (snitrummet for en graf kaldes

derfor også dens spændingsrum). Dette har den umiddelbare konsekvens, at vektorerne v og q er ortogonale, sådan at $v^t q = p^t A C^t q = 0$ (på grund af den fundamentale nulrelation).

De duale restriktioner (3.18.e) kan derfor erstattes af¹⁸⁾

$$(3.20.a) \quad v^t C^t = 0 \quad \text{og}$$

$$(3.20.b) \quad v^t + s_1^t - s_2^t = c^t \quad .$$

Bibetingelserne (3.20) kan bedst fortolkes, hvis vi opfatter de primale variable q som elektriske strømme. I så fald er den duale knudepunktvariable p de tilsvarende potentialer, og $v^t = p^t A$ er spændingsfaldene over netværkets kanter. Ligning (3.20.a) udtrykker da Kirchhoffs 2. lov: Summen af spændingsfald rundt i en lukket kredsløb er nul. Nulrelationen $v^t q = 0$ udtrykker da, at energien for netværket er konstant (den såkaldte Tellegens sætning, se fx Nielsen(1981)). Ligning (3.20.a) kan også gives en økonomisk fortolkning. Hvis knudepunkterne er konti, og q opfattes som varestrømme mellem de forskellige konti, kan knudepunktvariablen p fortolkes som skyggepriser pr. vareenhed, og v vil være værditilvæksten pr. vareenhed ved overgang fra en konto til en anden. Ligning (3.20.a) siger da, at værditilvæksten rundt i et lukket kredsløb skal være nul, og nulrelationen $v^t q = 0$ kan opfattes som Walras' lov for netværket.

Bemærk, at fortolkningen af spændingsvariablen som knudepunktstilknyttet kun er en af flere mulige fortolkninger. Vi husker fra kapitel 2, at incidensmatrixen A set fra en grafteoretisk synsvinkel er et specialtilfælde af en snitsætmatrix, og at de primale restriktioner (3.18.b) kunne have været formuleret ækvivalent ved

$$(3.21) \quad S q = 0 \quad ,$$

hvor S er en fundamental snitsætmatrix for netværkets graf.

18. Strængt taget er der ikke tale om ækvivalens, idet $v^t C^t = 0$ medfører, at der eksisterer et entydigt p , så $v^t = p^t B A$, hvor B er en eller anden regulær matrix. Vi kan derfor vælge $B=I$, så (3.19) gælder omvendt, men andre valg er også mulige

Da matricerne S og A er linearkombinationer af hinanden, ændrer dette ikke mængden af mulige løsninger til (3.18). Hvis vi havde anvendt (3.21) i stedet, ville den duale variabel

$$(3.22) \quad v^{*t} = p^{*t}S$$

være tilknyttet et snitsæt, og p^* kunne opfattes som tilknyttet grenene i grafens skelet (da S_s er en enhedsmatrix, må $p^* = v_s^*$).

Normalt foretrækker vi imidlertid intuitivt at opfatte den duale variabel som knudepunktstilknyttet, blandt andet fordi vi ofte kan måle den direkte i punkterne som fx hvis den repræsenterer spænding og temperatur. I nogle situationer det dog eksplicit nødvendigt at opfatte den duale variabel som knyttet til et snitsæt. Et godt eksempel på dette er "max flow-min cut" teoremet: Den maksimale størrelse af en strømning i et netværk med øvre kapacitetsgrænser på kanterne er lig med den minimale kapacitet af et snitsæt, der skiller netværkets kilde s fra terminalen t . Denne sætning kan ses som en konsekvens af dualitetssætningen for lineær programmering anvendt på "max flow"-problemet, jf. ovenfor. Det kræver dog en del "håndarbejde" at indse dette, så vi skal ikke bruge plads på det her. Den interesserede læser henvises til fx. Lawler(1976), pp 123-25.

3.3.5. "Out-of-kilter"-metoden

"Out-of-kilter" (ude-af-ligevægt) metoden er navnet på en algoritme til løsning af "min cost" cirkulationer. Den er udviklet uafhængigt af operationsanalytikeren D.R.Fulkerson(1961) og elektroingeniøren G.J.Minty(1960), og den udnytter på en illustrativ måde sammenhængen mellem problemets primale og duale formulering. Samtidig peger metodens begrebsapparat tydeligt i retning af nogle generaliseringsmuligheder, som vi skal vende tilbage til i kapitel 5. Algoritmens konkrete udformning er relativt kompliceret, så vi skal ikke gå i detaljer med den her. Den er fx beskrevet i Lawler(1976). Derimod skal vi af ovennævnte

grunde præsentere hovedideerne i metoden.

Udgangspunktet for "Ude af ligevægt" metoden er bibetingelserne i hhv. det primale problem og det duale problem i (3.18), nemlig

$$(3.18.c) \quad q \geq 1 \quad ; \quad s_1 \geq 0$$

og

$$(3.18.d) \quad -q \geq -u \quad ; \quad s_2 \geq 0$$

samt

$$(3.18.e) \quad p^t A + s_1^t - s_2^t = c^t \quad .$$

Ortogonalitetsbetingelserne for optimale løsninger indebærer, at hvis $\bar{q}, \bar{p}, \bar{s}_1$ og \bar{s}_2 er optimale, må for pilen $k=(i,j)$ gælde at

$$(3.23.a) \quad q_{ij} > l_{ij} \Rightarrow s_{ij}^1 = 0 \quad \text{og}$$

$$(3.23.b) \quad q_{ij} < u_{ij} \Rightarrow s_{ij}^2 = 0 \quad .19)$$

For pilen $k=(i,j)$ kan (3.18.e) skrives

$$(3.24) \quad p_j - p_i + s_{ij}^1 - s_{ij}^2 = c_{ij} \quad .$$

Ved anvendelse af (3.23) fås, da s_1 og s_2 er ikke-negative,

$$(3.25.a) \quad q_{ij} = l_{ij} \Rightarrow q_{ij} < u_{ij} \Rightarrow p_j - p_i \leq c_{ij}$$

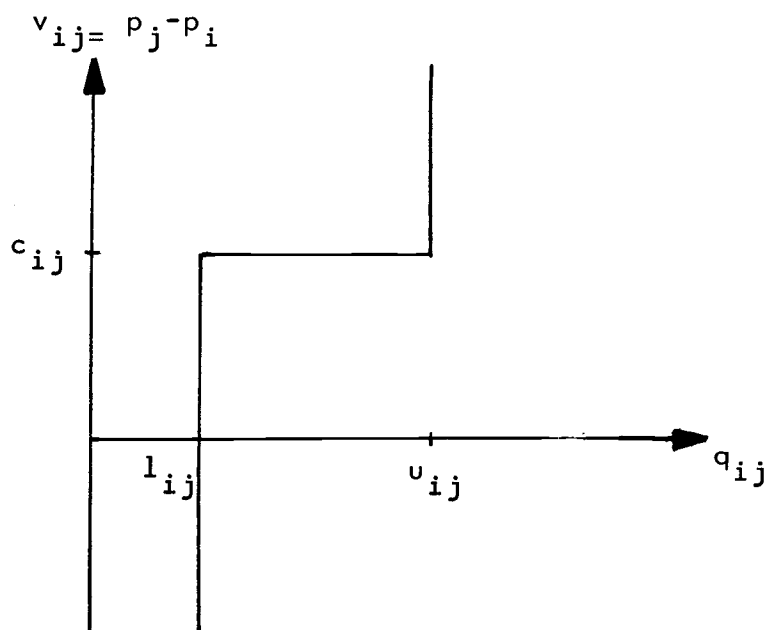
$$(3.25.b) \quad q_{ij} = u_{ij} \Rightarrow q_{ij} > l_{ij} \Rightarrow p_j - p_i \geq c_{ij}$$

$$(3.25.c) \quad l_{ij} < q_{ij} < u_{ij} \Rightarrow p_j - p_i = c_{ij}$$

Betingelserne (3.25) kaldes også ligevægtsbetingelserne ("kilter conditions"), og de værdier af $(p_j - p_i, q_{ij})$, der opfylder ligevægtsbetingelserne, kaldes pilens karakteristik eller overføringsfunktion. Karakteristikken kan afbildes i et "kilter-diagram" som figur 3.3.

En sådan primal-dual karakteristik er fx et meget brugt værktøj i elektrisk netværksteori, hvor en komponents (spændingsfald, strøm)-karakteristik normalt entydigt fastlægger

Figur 3.3. Karakteristik for kanten (i,j)



komponentens relevante egenskaber.

Lad os tage udgangspunkt i et givet sæt af primale og duale variable (p^0, q^0) , som ikke behøver at være optimale, men hvor q^0 opfylder tvangsbindingerne $Aq^0 = 0$. Mængden af pile i netværket kan nu deles i to klasser: Visse af pilene vil have tilordnede værdier $(p_j - p_i, q_{ij})$, der ligger på karakteristikken. Disse pile siges at være i ligevægt ("in kilter").

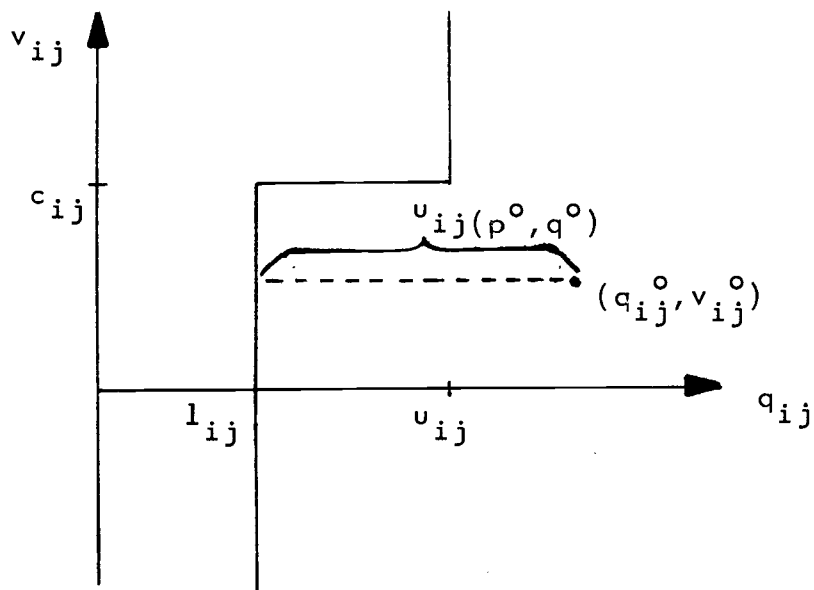
De resterende pile, hvis talpar ikke ligger på karakteristikken, siges at være ude af ligevægt. Et muligt vektorpar (p^*, q^*) er optimalt, når og kun når alle pile er i ligevægt.

Vi er nu i stand til at vurdere "afstanden" fra udgangsvektoren (p^0, q^0) til optimum: Vi betragter pilen $k=(i,j)$ og definerer dens "uligevægt" ("kilter number") $u_{ij}(p^0, q^0)$ som den vandrette afstand fra pilens talpar $(p_j^0 - p_i^0, q_{ij}^0)$ til karakteristikken, jf. figur 3.4.

Vi kan nu definere den samlede uligevægt for vektoren (p^0, q^0) som

$$(3.31) \quad u(p^0, q^0) = \sum_{ij} u_{ij}(p^0, q^0) \quad .$$

Et vektorpar (p^*, q^*) er optimalt, når og kun når $u(p^*, q^*) = 0$. Princippet i "Out-of-kilter"-algoritmen er nu, at vi vælger vilkårlige vektorer (p^0, q^0) som anført ovenfor. Derefter foretages en række iterationer, hvori enten cirku-

Figur 3.4. Uligevægten for kant (i, j) 

lationen q eller spændingen p ændres på en sådan måde, at uligevægten falder. Når uligevægten er nul, er vektorerne optimale.

3.3.6. Generaliseringsmuligheder

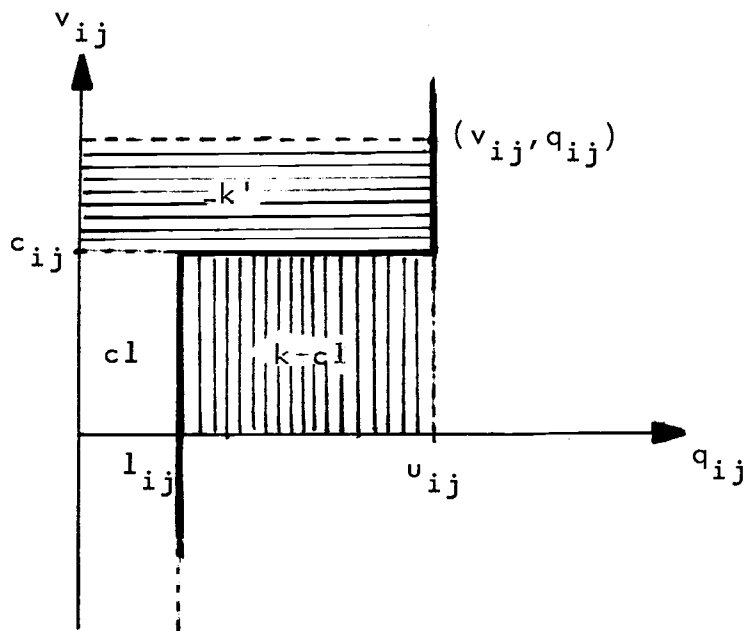
Det vigtige resultat af vores præsentation af "Out-of-kilter" algoritmen var indførelsen af begrebet en karakteristik. "Out-of-kilter" algoritmen lader sig let generalisere til løsning af netværksproblemer, hvor karakteristikerne har et mere kompliceret udseende. Vi skal antyde fremgangsmåden ganske kort, idet de elektriske netværksmodeller, vi skal gennemgå i kapitel 6, netop er eksempler på sådanne udvidelser af grundmodellen. For at indse dette må vi imidlertid fortolke problemet på en lidt anden måde end hidtil. Lad os betragte kanten $k=(i, j)$ og dens bidrag til målfunktionerne i vort duale problempar. Vi skal i resten af dette afsnit undertrykke indeks i, j på kantens tilknyttede variable af overskuelighedshensyn.

Kantens bidrag til den primale målfunktion kan skrives

$$\begin{aligned}
 (3.32) \quad k(q) &= cq = c(q-1) + c1 \\
 &= \int_1^q v(z)dz + c1 \quad ,
 \end{aligned}$$

hvor funktionen $v(q)$ er kantens karakteristik. Det første led på højresiden af (3.32) er lig med arealet mellem karak-

Figur 3.5. Geometrisk illustration af bidrag til målfunktionen



teristikken og q -aksen, afgrænset nedadtil af l og opadtil af q , som vist ved lodret skravering på figur 3.5. Det andet led på højresiden er uafhængigt af q , og det kunne derfor uden tab udelades af målfunktionen.²⁰⁾

Ydermere bemærker vi, at kantens bidrag til den duale målfunktion kan gives en tilsvarende fortolkning: Det duale bidrag er

$$(3.33) \quad -k' = s_1 l - s_2 u \quad .$$

Af de komplementære slaphedsbetingelser ses, at vi i optimum kan have tre tilfælde:

$$(3.34.a) \quad (v < c) \Rightarrow (s_1 = c - v) \wedge (s_2 = 0) \Rightarrow -k' = (c - v)l$$

$$(3.34.b) \quad (v = c) \Rightarrow (s_1 = s_2 = 0) \Rightarrow -k' = 0$$

$$(3.34.c) \quad (v > c) \Rightarrow (s_1 = 0) \wedge (s_2 = v - c) \Rightarrow -k' = (c - v)u$$

Det ses, at k' (det negative bidrag til den duale målfunktion) er lig med arealet imellem v -aksen og karakteristikkelinjen, afgrænset af c og v som vist ved vandret skravering på figur 3.5. Med andre ord kan det duale bidrag i optimum skrives

20. Alternativt kan leddet opfattes som en integrationskonstant, der som bekendt kan sættes vilkårligt.

$$(3.35) \quad -k'(v) = - \int_c^v q(z) dz$$

(hvor $q(v)$ er den inverse karakteristik).

Bemærk til sidst, at differensen mellem kantens primale og duale bidrag er

$$(3.36) \quad k - k' = vq$$

i alle tre tilfælde. Dette svarer på figuren til, at summen af de skraverede arealer og konstantleddet cl er lig med arealet vq .

Lad os nu lempe forudsætningerne og tillade, at netværket omfatter en mere kompliceret type af elementer, nemlig med en konveks og stykvist lineær omkostningsfunktion. En sådan omkostningsfunktion og dens tilhørende karakteristik er vist i figur 3.6.

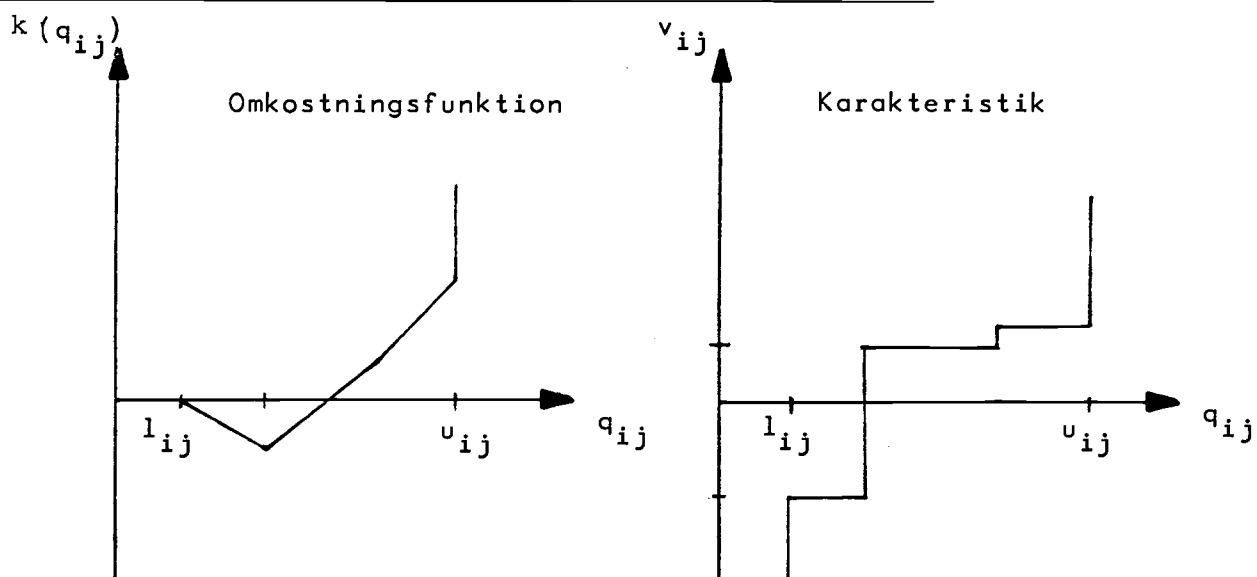
Det ses, at når karakteristikken som vist er ikke-aftagende, vil kantens "uligevægttal" stadig være veldefineret, og "out-of-kilter" algoritmen vil fortsat være operativ. Desuden kan det vises, at formlerne (3.32) og (3.35) for en given kants bidrag til de to målfunktioner i optimum stadig holder.²¹⁾ Dette gælder også - som vi skal se i kapitel 6 - selv om karakteristikken er differentiabel i det indre definitionsområde. En sådan strengt voksende, differentiabel karakteristik kaldes en primal-dual kobling, og disse koblinger giver netværksproblemet en helt speciel struktur, som vi senere skal vende tilbage til. Vi kan imidlertid allerede nu se intuitivt, at en differentiabel karakteristik kan tilnærmes vilkårlig fint med en trappefunktion som i figur 3.6, når vi lader antallet af "trappetrin" gå mod uendeligt - og det er jo netop det der sker ved en integration.

Et eksempel på en primal-dual kobling er vist i figur 3.7.

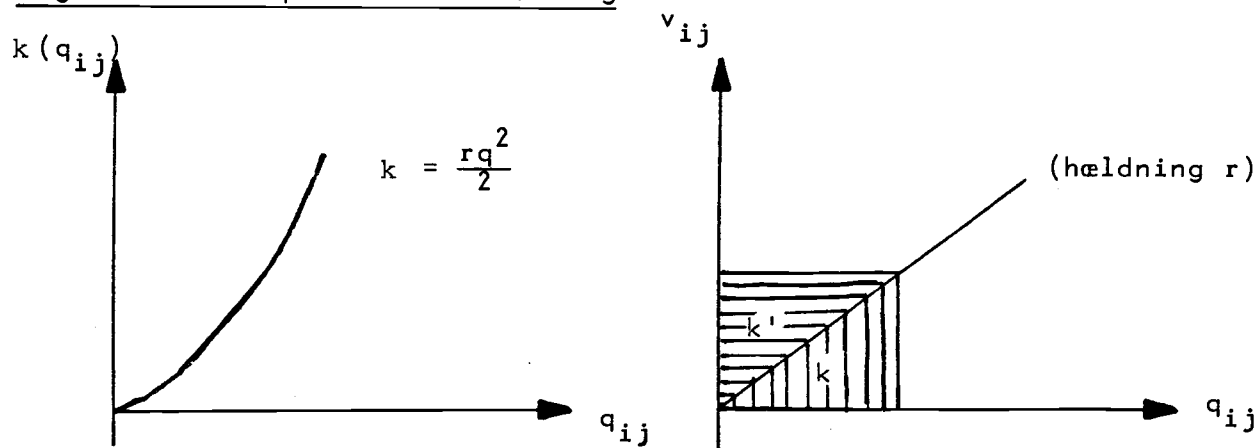
Vi får, at kantens bidrag til de duale målfunktioner er

21. Jf. fx Prager(1965) eller den mere stringente artikel af Minty(1960)

Figur 3.6 En konveks, stykvist lineær omkostningsfunktion.



Figur 3.7 En primal-dual kobling



$$(3.37) \quad k = (r/2)q^2$$

og

$$(3.38) \quad -k' = -(1/2r)v^2$$

I dette tilfælde kan netværket altså karakteriseres ved et dualt par af kvadratiske programmer. Vi skal i kapitel 6 vende tilbage til denne type strømningproblemer i forbindelse med løsningen af elektriske netværksproblemer.

De formler for bidragene til de to målfunktioner, vi har udledt i dette afsnit, gælder kun i optimum. Vi skal senere se, at netværksproblemet bliver betydeligt lettere at håndtere, hvis vi omformulerer målfunktionen i overensstemmelse med (3.33) og (3.35). Da denne omformulering hverken påvirker mængden af mulige løsninger, mængden af optimale løsninger eller målfunktionens værdi i optimum, er en sådan omfor-

mulering uskadelig.²²⁾ Dette betyder, at vores oprindelige duale programmer (3.18) erstattes af de ækvivalente programmer

	Minimer	Minimer
(3.39.a)	$K(q) = \sum_{ij} k_{ij}$ under	$K'(v) = \sum_{ij} k'_{ij}$ under
(3.39.b)	$Aq = 0$	$Cv = 0$
(3.39.c)	$l \leq q \leq u$	v fri

hvor, for hver kant, tallene k og k' er defineret ved (3.32) og (3.35). Bemærk, at definitionsområderne for q og v er givet ved projektionen af karakteristikken på hhv. q - og v -akserne. Vi skal senere vende tilbage til problemparret (3.39) i kapitel 6 om elektrisk netværksteori.

3.3.7. Værdikilder i netværksmodellen*

Inden vi helt forlader den operationsanalytiske netværks-tradition, skal vi introducere begreberne knudepunktsstrømkilder og kredsspændingskilder. Det viser sig nemlig, at de kanttilknyttede konstanter i vores problempar (3.39) altid kan transformeres til knudepunktstilknyttede konstanter (i det primale problem) eller kredstilknyttede konstanter (i det duale problem). Da vi vender tilbage til problemstillingen i kapitel 6, kan afsnittet læses kursorisk.

Et cirkulationsnetværk kan betragtes som et isoleret system, der udveksler "værdi" eller "energi" med omverdenen igennem bestemte, konkret afgrænsede kanaler. En sådan udveksling finder imidlertid først sted, når netværket modtager givne stimuli fra omverdenen. I det karakteristiske par af duale programmer for netværket repræsenteres disse givne stimuli af konstanterne i de primale og duale restriktioner. Vi skal derfor bruge fællesbetegnelsen "værdikilder" eller "energikilder" for disse konstanter.

De værdikilder, der er tilknyttet de primale restriktio-

22. Vi mangler dog at vise, at hvis en løsning er optimal for (3.18), er den også optimal for (3.39), men det skal ikke gøres her.

ner, dvs karakteristikkens q -akse, kaldes strømkilder eller primale kilder. I vores standardproblem udgøres de primale kilder af de nedre og øvre kapacitetsgrænser på kanterne l og u (det kan måske skurre i ørerne at kalde kapaciteter for strømkilder, men vi skal snart se berettigelsen af dette).

Tilsvarende kaldes de konstanter, der er tilknyttet de duale restriktioner eller karakteristikkens v -akse, for spændingskilder eller duale kilder. I standardproblemet optræder kanternes enhedsomkostninger c som duale kilder.

Vi er imidlertid ikke færdige endnu. Nullerne på højresiderne af de strukturelle bindinger $Aq=0$ og $Cv=0$ er i princippet også værdikilder - de har blot hidtil antaget værdierne nul, fordi vi har valgt at arbejde med lukkede netværk uden "lækager" i punkterne. Vi skal i det følgende kalde værdikilderne "interne", hvis de optræder i elementernes karakteristikker, og "eksterne", hvis de optræder i de strukturelle bindinger.

Det er et bemærkelsesværdigt faktum, at selv om interne og eksterne værdikilder ofte har vidt forskellige fysiske fortolkninger, kan vi altid transformere interne kilder til eksterne og omvendt. Også selv om denne transformation indebærer, at den topologiske tilknytning ændres fra kanter til punkter eller kredse. En sådan transformation kan nemlig opfattes som en simpel parallelforskydning af (q,v) -koordinatsystemet, som vi umiddelbart skal vise.

Lad os fx definere de standardiserede variable

$$(3.40) \quad \bar{q} = q - l$$

og

$$(3.41) \quad \bar{v} = v - c \quad .$$

Ved at indsætte $q=\bar{q}+l$ og $v=\bar{v}+c$ i de originale programmer (3.18) får vi de parallelforskudte, men i øvrigt ækvivalente programmer

	Minimer	Maksimer
(3.42.a)	$c^t \bar{q} + c^t l$	$s_1^t l - s_2^t u$
	under	under
(3.42.b)	$A\bar{q} = -Al$	$C\bar{v} = -Cc$
(3.42.c)	$0 \leq \bar{q} \leq u-l$	$\bar{v} + s_1 - s_2 = 0$

Det ses her, at de kanttilknyttede nedre kapacitetsgrænser l er transformeret til knudepunktstilknyttede eksterne strømklender $\bar{l} = -Al$. Disse eksterne kilder kan fortolkes som eksogene "lækager", dvs nettoudstrømninger fra netværkets knudepunkter, da $A\bar{q} = G^0 \bar{q} - G^i \bar{q}$ jo er forskellen på udstrømmingen fra og indstrømmingen til knudepunkterne.

Tilsvarende er de kanttilknyttede omkostninger c blevet transformeret til kredstilknyttede spændingskilder $\bar{c} = -Cc$. Da det måske kræver for stor abstraktionsevne at forestille sig en kredstilknyttet omkostning, kan vi i stedet antage, at C -matricen er en basiskredsmatrix. I så fald kan vi opfatte hver af de ækvivalente kredsspændingskilder som tilknyttet den entydige kant i co -træet, der definerer den pågældende basiskreds, jf. kapitel 2.

Formålet med en sådan parallelforskydning, der transformerer interne værdikilder til eksterne, er at opnå den matematiske forenkling, at karakteristikken tvinges igennem origo i det transformerede koordinatsystem. Hvis den originale karakteristik var givet ved

$$(3.43) \quad v = f(q) \quad ,$$

fås at

$$(3.44) \quad \bar{v} + c = f(\bar{q}+l) \quad .23)$$

Karakteristikken i det transformerede (\bar{q}, \bar{v}) koordinatsystem er da

$$(3.45) \quad \begin{aligned} \bar{v} &= \bar{f}(\bar{q}) \\ &= f(\bar{q}+l) - c \quad . \end{aligned}$$

Her vil gælde, at $\bar{f}(0) = 0$. De generaliserede programmer

23. Af nemhedsgrunde noterer vi i det følgende karakteristikken som en funktion, selv om den kan rumme lodrette stykker og derfor er en korrespondens. Vi definerer blot arealet af en lodret linie lig med nul

(3.37) kan nu skrives på den parallelforskudte, men i øvrigt ækvivalente form

	Minimer	Minimer
(3.46.a)	$K(\bar{q})$	$K'(\bar{v})$
	under	under
(3.46.b)	$A\bar{q} = -A1$	$C\bar{v} = -Cc$
(3.46.c)	$0 \leq \bar{q} \leq u-1$	\bar{v} fri ,

hvor $K(\bar{q})$ og $K'(\bar{v})$ er lig med summen over alle kanter af kanternes bidrag k_{ij} og k'_{ij} , givet ved

$$(3.47.a) \quad k = \int_0^{\bar{q}} \bar{v}(z) dz + c\bar{q} + cl$$

og

$$(3.47.b) \quad k' = \int_0^{\bar{v}} \bar{q}(z) dz + l\bar{v}$$

(index ij undertrykt).

Den generelle lære af vores øvelse med parallelforskydning af koordinatsystemet er således, at i et netværk med a kanter, $n-1$ punkter og $m=a-n+1$ basiskredse, kan de a kanttilknyttede strømkilder altid transformeres til $n-1$ uafhængige, ækvivalente knudepunktsudstrømninger ("lækager"). Tilsvarende kan de a kanttilknyttede spændingskilder transformeres til m uafhængige, ækvivalente spændingskilder, tilknyttet hver sin basiskreds.

I vores standard "min cost" cirkulationsproblem er der imidlertid to strømkilder pr. kant: en nedre kapacitet l og en øvre kapacitet u . Her er det kun muligt at reducere den ene af de to strømkilder efter frit valg - den anden må fortsat være intern i kanten. Vi har i de viste formler valgt at eliminere den nedre grænse, men det kunne lige så have været den øvre grænse u .²⁴⁾ I kapitel 6 skal vi se, hvordan vi under bestemte forudsætninger tillige kan trans-

24. Også dette tilfælde kan dog kringles, hvis vi opfinder a nye knudepunkter, sådan at vi deler hver kant i to nye kanter med hver sin strømkilde. På denne måde kan ethvert problem med indbyggede kapacitetsgrænser i kanterne reduceres til et problem uden kapaciteter, men med eksogene udstrømninger i knudepunkterne, kombineret med en positivitetsforudsætning på kanternes strømme.

formere primale kilder til duale og omvendt. Foreløbig skal vi dog ikke gå dybere i problemstillingen, idet vi først skal se, hvordan input-output modellerne kan opfattes som specialtilfælde af "min cost" cirkulationer.

4. STRUKTUREL ORDNING AF STORE LIGNINGSSYSTEMER

I dette kapitel skal vi se et eksempel på, hvordan de i de forrige kapitler udviklede netværksbegreber kan anvendes på økonomiske modeller.¹⁾ Inden vi går i gang med dette, er der måske grund til at påpege nogle generelle fordele ved at anvende etableret netværksteoretisk terminologi, hvor det er muligt.

For det første kan vi i almindelighed regne med at undgå en del dobbeltarbejde ved at anvende netværksterminologien. Det viser sig nemlig forbløffende ofte, at et praktisk forekommende problem kan reduceres til et ækvivalent problem, der allerede er løst i den eksisterende litteratur. Lawler(1976) viser ud fra denne grundtanke, hvordan en bred klasse af operationsanalytiske problemer kan opfattes som variationer over ganske få grundtemaer. Han viser samtidig, hvordan teorien om netværksoptimering udgør en generel og frugtbar ramme for disse reduktioner. Branin(1977) viser, at en tilsvarende reduktion er mulig for en bred klasse af fysiske modeller. Disse resultater er yderligere uddybet i fx Franksen(1981). Endelig kan erfaringerne fra denne rapport uden overdrivelse siges at give tilsvarende resultater for visse økonomiske (og statistiske) modeltyper

For det andet giver netværksteoriens begrebsapparat en enestående mulighed for kommunikation tværs over etablerede faggrænser. Læseren af denne rapport vil fx finde, at kapitlerne 2,3 og 6 giver en tilstrækkelig introduktion til løsning af en bred vifte af fx operationsanalytisk og elektroteknisk litteratur.

Netværksteoriens generelle økonomiske anvendelser stammer først og fremmest fra det forhold, at ethvert lineært ligningssystem kan opfattes som et multiplikativt netværk, jf kapitel 3, afsnit 2. Netværksteorien kan især bidrage positivt til fortolkningen af sådanne ligningssystemer. I det

1. Kapitlet kan overspringes uden tab af kontinuitet. Det bør dog læses som en øvelse i brug af de netværksteoretiske grundbegreber.

følgende skal vi gennemgå forskellige måder at analysere lineære ligningssystemer på, med det formål at "forstå" systemernes virkemåde bedre og dermed i sidste ende lette deres løsning.

Dette vil foregå i to trin. Først analyserer vi ligningssystemets logiske struktur ved at foretage en ordning af dets underliggende orienterede graf. En sådan ordning er et velkendt redskab i makroøkonomisk analyse under navnet "kausal ordning". Hovedformålet med "kausalanalysen" er dels at finde systemgrafens stærke komponenter, der i den økonomiske tradition kaldes "simultane blokke",²⁾ dels at finde en hensigtsmæssig rækkefølge at ordne disse stærke komponenter på, sådan at ligningssystemet både bliver lettere at løse og at "læse".

Hvis modellen indeholder meget få stærke komponenter, er sådan en "kausalordning" imidlertid ikke ret sigende. Derfor supplerer vi den logiske analyse med et andet trin, hvori vi giver en kvantitativ vurdering af de enkelte piles "væsentlighed" i den relation, de indgår i. Dette munder ud i, at vi finder et "forklarings skelet" for systemet, dvs et udtræk af væsentligste forklaringsfaktorer for ligningssystemets endogene variable.

4.1. Logisk ordning af en orienteret graf

Logisk ordning af en graf ("quasi-level assignment") er en tilordning af tal h_i til punkterne i grafen. Tilordningen foregår på en sådan måde, at hvis x_j er tilgængelig fra x_i er $h_i \leq h_j$ med lighedstegn hvis og kun hvis x_i og x_j ligger i samme stærke komponent.³⁾

Gennemgangen af logisk ordning vil falde i tre afsnit: Lokalisering og ordning af stærke komponenter, bestemmelse af den kondenserede acykliske graf og beskrivelse af en algoritme til logisk ordning af en acyklisk graf. Algoritmen lader sig let udvide til at gælde vilkårlige grafer.

2. Vi skal i det følgende undgå betegnelsen "blok", idet dette ord har en helt anden betydning i grafteoretisk terminologi, se fx. Frank Nielsen(1981)
3. Men bemærk, at $h_j > h_i$ ikke omvendt behøver at medføre, at x_j er tilgængelig fra x_i .

4.1.1. Identifikation af stærke komponenter

En stærk komponent i en graf er i kapitel 2 defineret som en komponent med den egenskab, at alle punkter i den skal være gensidigt tilgængelige (da et punkt pr. konvention er tilgængeligt fra sig selv, kan en stærk komponent trivielt bestå af et enkelt punkt). Formelt kan vi sige at mængden af punkter i den stærke komponent, der indeholder x_i , er

$$(4.1) \quad Z_i = R(x_i) \cap R^{-1}(x_i) \quad .$$

Den første mængde kan findes som mængden af punkter, der er repræsenteret ved et ettal i rækken for x_i i tilgængelighedsmatricen R . Den anden mængde kan findes på samme måde, blot i søjlen for x_i . Mængden Z_i er med andre ord de punkter x_j , for hvilke $r_{ij} = r_{ji} = 1$. En generel måde at finde de stærke komponenter på er derfor at danne matricen

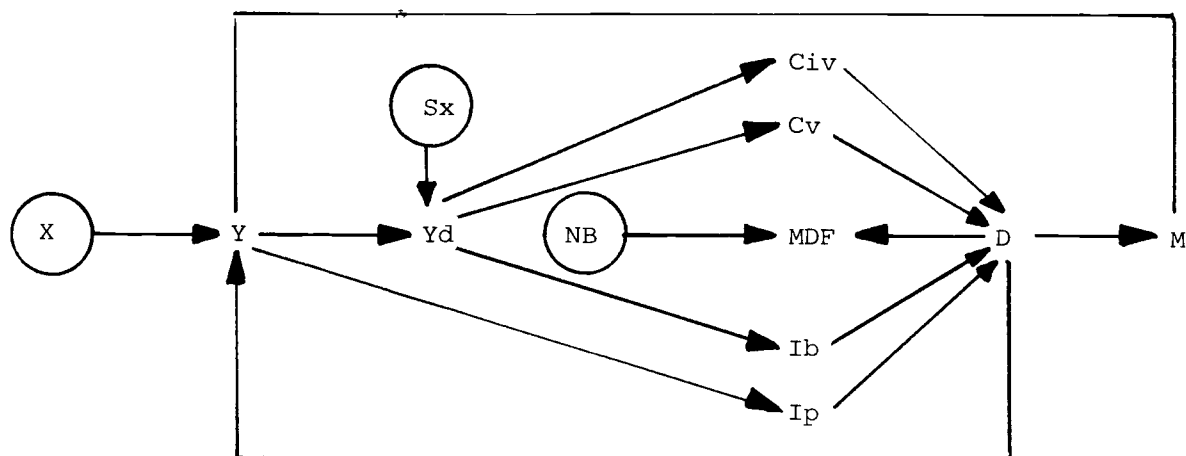
$$(4.2) \quad R_z = R \underline{x} R^t \quad .$$

Denne matrix, der er den symmetriske delmatrix af R , vil i række i have ettaller for de punkter, der indgår i samme stærke komponent som x_i ($Z_i(x_i)$ kan som nævnt være et enkelt punkt, nemlig x_i). Da de stærke komponenter udgør en klas-sedeling af punkterne X , vil R_z -matricen kunne ordnes, så den bliver blok-diagonal i z blokke (en for hver stærk komponent).

De stærke komponenter kan ikke analyseres yderligere ud fra tilgængelighedsegenskaberne, da alle punkter i komponenten jo er gensidigt tilgængelige. En vis struktur kan vi dog få frem, hvis vi ser på den k -begrænsede tilgængelighed.

Til ethvert punkt x_i i en stærk graf (og dermed en stærk komponent) kan vi knytte et talpar, indtallet og udtallet. Udtallet er den største afstand fra punktet til et vilkårligt andet punkt, og indtallet er omvendt den største afstand fra et vilkårligt andet punkt til x_i . Figur 4.1 viser grafen for den økonomiske model PLUTO (let forenklet).

Figur 4.1. Grafen for modellen PLUTO



Eksogene variable:

X : Eksogene efterspørgselskomponenter

Sx : Skatter

Nb : Pengebasen

Endogene variable:

Y : Bruttonationalprodukt

Yd : Disponibel indkomst

Civ : Forbrug af ikke-varige varer

Cv : Forbrug af varige varer

Ib : Investeringer i boliger

Ip : Øvrige private faste investeringer

D : Samlet endogen efterspørgsel

M : Import

Mdf : Sekundær pengeforsyning

Den har en basis bestående af punkterne X, Sx og Nb (svarende til de eksogene variable), mens de resterende punkter udgør en enkelt stærk komponent. Der er således i alt 4 stærke komponenter i PLUTO, men vi skal koncentrere os om den sidstnævnte, som vi i det følgende opfatter som en selvstændig, stærk graf Z. Afstandsmatricen for Z er vist i tabel 4.1, hvor tillige punkternes udtal og indtal er angivet. Udtallet for x_i findes ved at tage det største tal i afstandsmatricens række i, og indtallet findes tilsvarende som det største tal i søjle i.

Tabel 4.1. Afstandsmatrix mm. for Z-komponenten i PLUTO.

	Y	Yd	Civ	Cv	Ib	Ip	D	Mdf	M	udtal
Y	0	1	2	2	2	2	3	4	4	4
Yd	3	0	1	1	1	4	2	3	3	4
Civ	2	3	0	3	3	3	1	2	2	3
Cv	2	3	4	0	3	3	1	2	2	4
Ib	2	3	4	3	0	3	1	2	2	4
Ip	2	3	4	3	3	0	1	2	2	4
D	1	2	3	2	2	2	0	1	1	3
Mdf	3	4	5	1	1	4	2	0	3	5
M	1	2	3	3	3	2	3	4	0	4
indtal	3	4	5	3	3	4	3	4	4	-

Det eller de punkter i grafen, der har det mindste udtal, kaldes grafens udcenter, og det pågældende udtal kaldes grafens udradius. Det eller de punkter, der har det største udtal, kaldes komponentens udperiferi. Tilsvarende kan vi definere indcenteret, indradius og indperiferien som de omvendte begreber. For PLUTO er udcenteret således (Civ,D), udradius er 3 og udperiferien er (Mdf). Indcenteret er (Y,Cv,Ib,D), inradius er 3 og indperiferien er (Civ). Det største udtal vil altid være lig med det største indtal, og det kaldes grafens diameter. I eksemplet her er diameteren 5.

Der findes en række metoder til analyse af stærke grafer, se fx Harary et al (1965). Vi skal imidlertid ikke forfølge emnet yderligere her, idet vi i stedet vil tage en alternativ synsvinkel op nedenfor.

4.1.2. Den kondenserede acykliske graf

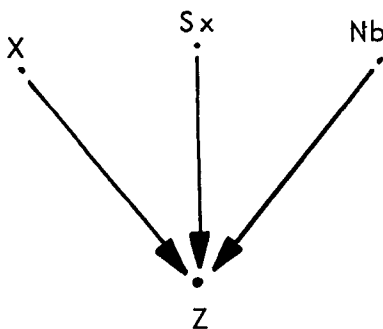
En acyklisk graf er en orienteret graf uden ensrettede kredse. En sådan acyklisk graf udgør en partiel ordning af punkterne i grafen. Vi skal se, hvordan en vilkårlig graf kan omformes til en acyklisk graf, uden at de oprindelige tilgængelighedsegenskaber går tabt. Først må vi imidlertid definere nogle grundlæggende begreber.

Lad D være en orienteret graf med punkterne X . For enhver klassedeling af punkterne X i klasserne (X_1, X_2, \dots, X_s) kan vi definere den kondenserede graf med hensyn til klassede-

lingen ved

- (4.3) A. Et punkt x_i^* i den kondenserede graf D^* svarer til en klasse X_i af punkter i D
- B. Der går en pil fra x_i^* til x_j^* i D^* , hvis der går mindst en pil i D fra et punkt i X_i til et punkt i X_j .

(Eventuelle sløjfer, der måtte opstå ved kondenseringen, slettes). Da de stærke komponenter Z_i i en graf udgør en klassesdeling af grafens punkter, kan vi definere den kondenserede acykliske graf som den kondenserede graf m.h.t. klassesdelingen Z_i .⁴⁾ Når vi kalder den kondenserede graf m.h.t. de stærke komponenter for acyklisk, er det fordi den naturligvis ikke kan indeholde ensrettede kredse. En sådan kreds vil altid være en delgraf af en stærk komponent, og derfor vil den være kondenseret til et punkt i D^* . Den kondenserede acykliske graf for PLUTO er



Nabomatricen N^* for den kondenserede acykliske graf D^* kan findes på en særdeles enkel måde ud fra nabomatricen N for D . Vi vender tilbage til matricen R_Z , der var tilgængelighedsmatricen for den stærke del af D , jf. (4.2). Hvis vi i denne matrix sletter alle alle rækker undtagen en for

4. Når vi normalt taler om den kondenserede graf, er det netop kondenseringen med hensyn til de stærke komponenter, vi hentyder til. Men det kan også være interessant at kondensere m.h.t. andre klassesdelinger, fx. ensrettede snitsæt (jf. fx. Christophides (1975)). Mere konkret kan grafen for en input-output tabel fx. kondenseres m.h.t. en klassesdeling af erhvervene i hovedbrancher, se fx Asger Olsen(1981) eller (1984).

hver stærk komponent, fås en summationsmatrix G af dimensionen $(z \times n)$ (rækken for komponent nr. i indeholder et ettal for punkt nr. j , hvis punktet indgår i komponent i , nul ellers).⁵⁾

Hvis N er nabomatricen for den oprindelige graf D , kan vi finde nabomatricen for den kondenserede graf D^* af

$$(4.4) \quad N^* = \underline{G^* N^* G^t} .$$

(idet vi ved at nulstille diagonalen sletter eventuelle sløjfer, der opstår ved kondenseringen).

4.1.3. Logisk ordning af en acyklisk graf

Da D^* er acyklisk, er det en enkel sag at finde dens basis B^* . Et punkt vil nemlig være et basispunkt for D^* hvis og kun hvis det har indgangsvalensen 0 og dermed søjlesummen 0 i N^* . Da der ydermere ikke kan være nogen ensrettede kredse i D^* , kan vi nu med udgangspunkt i basis B^* tildele ethvert punkt et tal h_i , sådan at $h_i < h_j$ hvis (men ikke kun hvis) x_j er tilgængeligt fra x_i . Tallene vil ikke være entydige, men de vil rangordne punkterne på en entydig måde. En algoritme, der udfører den nødvendige tilordning er:

- (4.5) A. Sæt $k = 0$
 sæt $h_i = 0$, alle punkter i
 sæt indgangsvalenserne $v_i^0 = i^t N^*$
- B. Gentag
 sæt $k = k + 1$
 find et punkt med indgangsvalens nul
 giv det nummeret $h_i = k$
 sæt $v_i^{k+1} = v_i^k$ minus punktets række i N^*
 indtil alle punkter er omnummereret

Den logiske ordning er nu tilendebragt. Da enhver orienteret graf har en kondenseret acyklisk graf, og da enhver acyklisk graf kan ordnes ved (4.5), vil enhver graf kunne

5. Se gennemgangen af summationsmatricer i appendix 2.

tildeles numre på denne måde, idet vi kan nummerere punkterne i den originale graf D sådan, at alle punkter i den stærke komponent Z_i tilordnes det nummer h_i , komponenten fik tilordnet i den kondenserede graf D^* .

4.2. Strukturel ordning af ligningssystemer

Et lineært ligningssystem kan skrives på formen

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

hvor x er en vektor af eksogene variable, y er en vektor af endogene variable, mens Y og X er passende koefficientmatricer, jf kapitel 3, afsnit 2. Vi skal opfatte y og x som punkter i et netværk, hvis vægtmatrix er givet ved koefficientmatricen (her dog transponeret). Punkterne for de eksogene variable er kilder, der "forsyner" netværket med den eksogene påvirkning $(0, x)$. Vi skal i det følgende antage, at ligningerne kan løses til

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I-Y & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (I-Y)^{-1} & (I-Y)^{-1}X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Det ses, at det kun er nødvendigt at invertere matricen $(I-Y)$, idet koefficientmatricen er blok-triangulær. Hvis ligningssystemet er meget stort, kan det være en fordel at prøve at omsortere elementerne i y -vektoren, sådan at selve Y -matricen også bliver blok-triangulær. Dette betyder dels, at de enkelte diagonalblokke kan inverteres hver for sig, sådan at der spares regnetid, dels at modellen bliver lettere at "forstå". En sådan omsortering er netop identisk med den logiske ordning af systemets graf, vi gennemgik ovenfor.

4.2.1. Logisk ordning af ligningssystemer

Det er klart, at den "kausalanalytiske" metode kun giver gevinst, hvis koefficientmatricen Y er "tyndt besat", dvs indeholder mange nuller. I modsat fald er der stor sandsynlighed for, at alle y -punkterne indgår i samme stærke komponent, sådan at Y -matricen ikke kan blok-triangulariseres. I takt med, at ambitionsniveauet for økonomiske modeller "endogeniseringsgrad" er blevet øget, og Y -matricen således er blevet tættere besat, har kausalanalysen følgelig tabt praktisk værdi.

Interessen samler sig derfor om muligheden for at ordne og fortolke den indre struktur i de stærke komponenter. På dette punkt er teorien om orienterede grafer imidlertid lidt tynd. Vi husker fra afsnit 1 at vi fx kan finde komponentens udcenter og udradius (og/eller de omvendte begreber). Men erfaringen viser, at disse øvelser ikke bidrager væsentligt til vores intuitive forståelse af komponentens struktur. En teoretisk langt mere tilfredsstillende løsning ville være at finde - hold fast - en ensrettet, udspændende, lukket tur af minimum kardinalitet.⁶⁾ Ved at nummerere komponentens punkter i den rækkefølge, hvormed de indgår i en sådan lukket tur, fås en god rækkefølge at "læse" komponentens ligninger i. Hermed er problemet imidlertid ikke løst, for problemet er et "længste omvej" problem, og selv om det er teoretisk velbelyst, er der til dato ikke udviklet egnede algoritmer, der kan løse det for blot mellemstore modeller.

Samme konklusion nås af Garbely og Gilli(1984), der ved hjælp af forskellige tricks søger at finde en udspændende delgraf, der indeholder så mange af den lukkede turs kanter, som det er praktisk muligt at finde. Vi må altså konkludere, at selv om vi i princippet ved, hvad vi skal gøre, bliver vi svigtet på algoritmesiden.

En lettere løsning er at finde et udspændende ensrettet træ for komponenten. Et rimeligt forslag ville være et udtræ med rod i komponentens ud-center eller, omvendt, et

6. Hvis komponenten har en ensrettet Hamilton-kreds, er det altså den vi søger

ind-træ til ind-centeret.⁷⁾ Denne procedure vil afdække hovedstrukturerne i komponenten med en rimelig grad af effektivitet, og den burde formentlig implementeres i økonomiske standardprogrammer. Algoritmer er givet i fx Lawler(1976) og Christophides(1975).

Hvis den stærke komponent er meget "tykt" besat med kanter, vil der imidlertid eksistere så mange ud-træer og udspændende kredse, at også de bliver temmelig intetsigende. Ikke desto mindre vil vi alligevel ofte have fornemmelsen af, at nogle sammenhænge "dominerer" komponentens egenskaber, mens andre er mindre væsentlige. Sådanne "prioriteringer" af sammenhænge kan imidlertid ikke foretages inden for rammerne af den kvalitativt betonedede grafteori. I stedet må vi eksplicit inddrage kvantitative forhold, dvs opfatte ligningssystemet som et netværk. Bemærk, at dette kun giver mening, hvis de eksogene variable kan tildeles "typiske" størrelsesordener på en eller anden måde.⁸⁾ Dette vil i udpræget grad være tilfældet i empiriske økonomiske modeller, hvor en analyse altid vil tage udgangspunkt i en historisk udgangssituation, som den endelige løsning hverken kan eller bør afvige for meget fra.

4.2.2. Strømninger af "forklaringskraft"

Lad os derfor antage, at vi har en "typisk" historisk løsning (y_0, x_0) af vores model, dvs at (y_0, x_0) opfylder

$$(4.8) \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

jf (4.6). Denne løsning kan i første omgang "kausalanalyseres", men lad os for nemheds skyld antage, at resultatet er negativt: Y-matricen definerer en enkelt stærk komponent og kan følgelig ikke blok-triangulariseres. Lad os endvidere

7. Faktisk kan denne procedure under heldige omstændigheder give det teoretisk korrekte resultat, idet en Hamiltonkreds danner et udspændende ensrettet træ, når vi fjerner en vilkårlig kant fra den
8. Dette vil fx. være tilfældet, hvis de eksogene variable er stokastiske og har en middelværdi, eller hvis der er begrænsninger i deres variationsområde

foreløbig antage, at alle koefficienter og variable er større end nul.

Vi strammer nu fortolkningen af (4.8), idet vi opfatter ligningssystemet som knudepunktsbalancen for et strømningss-netværk, dvs at vi definerer udstrømningen i punkterne residualt af bevaringsloven:

$$(4.9) \quad t_u + (y_o; \hat{x}_o) \begin{pmatrix} Y^t & 0 \\ X^t & 0 \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} y_o \\ x_o \end{pmatrix}$$

se evt udledningen af (5.5). Dette svarer til, at udstrømningen fra et punkt j sættes lig med

$$(4.10) \quad t_{uj} = (1 - \sum_i y_{ij}) y_{oj} \quad ,$$

hvor y_{ij} er det (i,j) 'te element i koefficientmatricen Y (en tilsvarende formel gælder for de eksogene variable x_j). Vi opfatter den substans, der flyder i netværket, som "forklaringskraft". I en række tilfælde vil de således definerede udstrømninger tilsyneladende være ufortolkelige, men vi skal se, at dette ikke invaliderer metoden.

Nu kunne vi fx udnytte det faktum, at enhver strømning kan dekomponeres i delstrømme, der enten er tilknyttet grafens elementære veje fra kilder til terminaler eller dens ensrettede basiskredse, se fx Christophides(1975) eller den grundige gennemgang af signalgrafer i Frank Nielsen(1981).⁹⁾ Ydermere kan de kredstilknyttede strømme fordeles ud på de "forårsagende veje". Et eksempel på, hvordan dette kan gøres for nationalregnskabs- og input-output matricer er givet i Defourny og Thorbecke(1984). Teknikken kan imidlertid med fordel anvendes på alle lineære ligningssystemer. Men da antallet af disse elementarveje og basiskredse ofte er meget stort, er metoden ikke altid hensigtsmæssig ved analyse af store systemer.

Et bedre overblik over modellens "forklaringsstruktur" opstår utvivlsomt, hvis vi danner et udspændende ud-træ for netværket på en sådan måde, at summen af træets strømme er

9. Bemærk, at disse elementære veje svarer til ensrettede kredse i det tilsvarende lukkede netværk. Metoden svarer derfor til opløsningen af q -vektoren i kredsstrømmene q_c for det lukkede strømningssnetværk, jf. (3.14.b)

maksimal. Vi skal kalde et sådant træ for et (maksimalt) forklarings skelet. Algoritmer er givet i Lawler(1976), afsnit 8.14, eller Christophides(1975), afsnit 7.3. Da et sådant træ er en acyklisk graf, kan dets punkter nummereres på præcis samme måde, som ved den almindelige logiske ordning (kausalanalyse), jf afsnit 2.

Det ordnende kriterium ved en sådan procedure kan siges at være, at den "dominerende forklaringsfaktor" i en ligning så vidt muligt skal være bestemt forud (undtagen for den variabel, der er træets rod).¹⁰⁾ Et vilkårligt punkt kan vælges som rod, men et bedre valg er formentlig det punkt j , for hvilket $(y_j - t_{uj})$ er maksimal (dvs det punkt, der afleverer mest "forklaringskraft" til resten af netværket).

En endnu stærkere ordningsprocedure får vi, hvis vi lukker netværket ved at tilføje et universelt referencepunkt, sådan at vi opfatter hele netværket som en enkelt stærk komponent. Vi kan nu danne et maksimalt ud-skelet fra referencepunktet. På denne måde undgår vi det arbitrære valg af rod for træet, og samtidig får vi et træ af "dominerende forklaringsfaktorer" for den samlede model.¹¹⁾

Proceduren kan udvides til at omfatte modeller med negative variable og koefficienter. I så fald skal vi blot se bort fra alle minustegn ved udvælgelsen af træet, sådan at det er strømmenes numeriske værdier, der er afgørende. Ikke-lineære modeller kan også analyseres, hvis vi totaldiferentierer og lineariserer dem omkring (y_0, x_0) .

Opfattelsen af et vilkårligt lineært ligningssystem som et strømningsnetværk er på kanten af det absurde, men til det givne formål er metoden altså fortolkelig. Den skitserede procedure er i virkeligheden blot en formalisering af, hvad alle brugere af empiriske modeller gør dagligt. I teorien om regressionsanalyser er metoden i øvrigt kendt i forbindelse med de såkaldte "Tinbergen-diagrammer".

10. Et ud-træ har jo netop den egenskab, at alle dets punkter har indgangsvalensen 1 - undtagen roden, der har indgangsvalens nul. Bemærk, at det duale ind-træ ikke kan gives en tilsvarende fortolkning.
11. En sådan procedure kunne også anvendes for ikke-stærke ("dekomposable") systemer, men i så fald kan vi få en indbyrdes ordning af de stærke komponenter, der er i modstrid med den logiske ordning, vi normalt gennemfører.

5. INPUT-OUTPUT MODELLER OG STRØMNINGER I NETVÆRK

5.1. Input-output tabeller som netværksmatricer

Den samlede input-output transaktionstabel

$$(5.1) \quad C = \begin{pmatrix} A & E \\ Y & Y_f \end{pmatrix}, \text{ jf. (1.1),}$$

minder meget om vægtmatricen for et netværk, hvori punkterne repræsenterer de forskellige konti (primære inputs, erhverv og endelig anvendelse), og pilen (i,j) repræsenterer en leverance fra konto i til konto j . Fra et netværksteoretisk synspunkt lider transaktionsmatricen C imidlertid af den svaghed, at punkterne ikke er nummereret ens lodret og vandret: Den lodrette rækkefølge er (erhverv, primære inputs), og den vandrette rækkefølge er (erhverv, endelig anvendelse). Den rigtige fremgangsmåde er imidlertid at definere en entydig rækkefølge, fx (primære inputs, erhverv, endelig anvendelse), der anvendes både på rækker og søjler. Dette kræver, at vi udvider systemmatricen med et antal nulmatricer, sådan at vi får den samlede i-o systemmatrix

$$(5.2) \quad T = \begin{pmatrix} 0 & Y & Y_f \\ 0 & A & E^f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

der uden forbehold kan opfattes som vægtmatricen for et netværk.¹⁾ Det ses, at søjlerne for primære inputs er nul, og at rækkerne for endelig anvendelse er nul, idet disse konti er hhv kilder og terminaler for netværket. Mængden af primære inputs udgør netværets basis, og de endelige anvendelser udgør omvendt netværkets kontrabasis, mens erhvervene er indre punkter.

1. Det er næppe et tilfælde, at matricerne netop er opstillet som i (5.2) i Leontief's originale arbejder

Da debet- og kreditsiden af hver konto definatorisk skal balancere, noterer vi yderligere, at input-output tabellen repræsenterer et åbent strømningssnetværk. Indstrømningen i netværket sker i punkterne for primære inputs, og indstrømningsvektoren er givet ved

$$(5.3) \quad t_i = (y, 0, 0) \quad ((n-1) \times 1),$$

(idet punkt nr n er netværkets (endnu ikke oprettede) "omverden"), mens udstrømningen fra netværket sker i punkterne for endelige anvendelser og er givet ved

$$(5.4) \quad t_u = (0, 0, f) \quad ((n-1) \times 1).$$

Nettoindstrømningerne fra omverdenen $t_i - t_u$ er således y for de primære inputs, 0 for erhvervene og $-f$ for de endelige anvendelser (se evt figur 3.1).

Bevaringsloven eller regnskabsidentiteten siger da, at for enhver konto skal række-summen i T-matricen plus udstrømningen t_u være lig med søjlesummen i T plus indstrømningen t_i :

$$(5.5) \quad T i + t_u = T^t i + t_i =: t \quad .$$

Vektoren t kaldes gennemstrømningsvektoren, idet dens j 'te element indeholder strømmen igennem konto nr. j . Den er givet ved

$$(5.6) \quad t = (y, g, f) \quad .$$

På grund af bevaringsloven (5.5) må netværkets indstrømning være lig med dets udstrømning, dvs

$$(5.7) \quad \begin{aligned} v &= i^t t_u = i^t t_i \\ &= i^t f = i^t y \end{aligned} \quad .$$

Denne identitet er velkendt, idet v er det reale bruttonationalprodukt (BNP).²⁾ Ligning (5.7) er da en formulering af den gamle sætning om, at BNP (opgjort fra udgiftssiden) er

2. Vi ser for nemheds skyld bort fra import og afgifter her

lig med bruttofaktorindkomsten BFI (opgjort fra indtægtssiden).

Vi skal senere se, at det kan være en fordel at lukke netværket. Dette sker ved, at vi opretter et universelt punkt, "omverdenen", der modtager de endelige anvendelser og leverer de primære inputs, jf figur 3.1.³⁾ Den lukkede systemmatrix kan opskrives

$$(5.8) \quad T^* = \begin{pmatrix} 0 & Y & Y_f & 0 \\ 0 & A & E_f & 0 \\ 0_t & 0 & 0 & f \\ y^t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

smlgn (5.2), og den har den udvidede gennemstrømningsvektor

$$(5.9) \quad t^* = (y, g, f, v) \quad (nx1).$$

Det ses, at BNP nu optræder som strømmen igennem "omverdenen"s konto. Bevaringsloven siger nu blot, at rækkesummen i T^* skal være lig med søjlesummen

$$(5.10) \quad T^* t_i = T^* i = t^*$$

Vi husker fra kapitel 3, at den lukkede netværksmatrix (5.8) kan skrives ved hjælp af de fundamentale strukturmatricer

$$(5.11) \quad T^* = \bar{G}_u \hat{q} \bar{G}_i,$$

hvor q er en cirkulationsvektor for netværket, dvs en vektor af kantdimension, hvis elementer er en nummereret "stykliste" af de elementer t_{ij}^* fra T^* , der er forskellige fra nul. Med andre ord er $q_h = t_{ij}^*$, hvis kant nr h eksisterer og går fra punkt i til punkt j . Matricerne \bar{G}_u og \bar{G}_i er hhv. den udvidede ud- og indmatrix for netværket (5.8).⁴⁾ Matricernes kantdimension skal selvfølgelig være nummereret på samme måde som elementerne i q -vektoren, og vi skal vælge at indeksere pilene fra "omverdenen" først og pilene til "omver-

3. Vi kan heuristisk, men ikke særlig præcist, opfatte omverdenen som husholdningerne, der modtager færdigvarer og leverer arbejdskraft
4. Vi husker fra kapitel 2, at \bar{G}_u og \bar{G}_i er (punktxkant) summationsmatricer, der for hvert punkt summerer vægtene for de pile, som går hhv. ud fra og ind i punktet

denen" sidst, sådan at

$$(5.12) \quad q = (y, x, f) \quad (ax1),$$

hvor y er de primære inputs, f er de endelige anvendelser, og x er netværkets (indre) strømning (dvs ikke-nul elementerne fra den åbne netværksmatrix T i (5.2)).

Vi skal i det følgende opfatte cirkulationen q som den variable i vores netværk, mens strukturmatricerne opfattes som parametre, der fastlægger leverancernes kvalitative struktur. Vi kan tænke på denne struktur som de "forbundne kanaler", leverancestrømmene flyder i, og den er selvfølgelig identisk med netværkets orienterede graf, der er entydigt fastlagt ved \bar{G}_u og \bar{G}_i . Sondringen mellem modellens (variable) kvantitative egenskaber og dens (konstante) strukturelle egenskaber er ikke almindelig inden for input-output litteraturen.⁵⁾ Derimod er den en hjørnesten i de beslægtede modeller for strømninger i netværk og elektriske netværk. Vi skal derfor bruge en del kræfter på at opstille input-output modellen i disse to modeltypers referencerammer.

5.2. Input-output modellen som en netværksmodel

5.2.1. En omformulering af standardmodellen

Den normale input-output mængdemodel opstår, når vi forsøger at forudsige strømmene i den åbne netværksmatrix T ud fra eksogene krav til udstrømningsvektoren t_u (ofte er det især de afledede krav til indstrømningen t_i , der ønskes bestemt). Dette gøres ud fra en antagelse om, at alle strømme ind i et vilkårligt knudepunkt er proportionale. Antagelsen kan formaliseres til, at koefficientmatricen

$$(5.13) \quad T = T_0(t_0)^{-1}$$

5. I den danske makroøkonomiske model ADAM er sondringen dog gennemført og af stor praktisk betydning.

er uafhængig af gennemstrømningsvektoren t (T_0 er input-output tabellen i en historisk udgangssituation).

Vi kan nu bestemme alternative værdier af gennemstrømningen ved at indsætte antagelsen (5.13) i bevaringsloven (5.5):

$$(5.14) \quad \begin{aligned} t &= T i + t_u \\ &= \bar{T} \bar{t} i + t_u \end{aligned} ,$$

der normalt kan løses til

$$(5.15) \quad t = (I - \bar{T})^{-1} t_u .$$

Den inverterede matrix er givet ved

$$(5.16) \quad (I - \bar{T})^{-1} = \begin{pmatrix} I & \bar{Y}(I - \bar{A})^{-1} & \bar{Y}(I - \bar{A})^{-1} E + \bar{Y}_f \\ 0 & (I - \bar{A})^{-1} & (I - \bar{A})^{-1} E \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Det ses, at formuleringen (5.13) er en meget kompakt måde at angive samtlige mængdesammenhænge i systemet på, smlg. kapitel 1, afsnit 3 og 4. Tilsvarende får vi den kompakte prismodel ved dualisering:

$$(5.17) \quad p^t = p_i^t (I - \bar{T})^{-1} ,$$

hvor p_i er en vektor $(p_y, 0, 0)$ af eksogene priser på primære inputs, og p er prisvektoren på punkternes gennemstrømning t . Ved den kompakte formulering (5.16) og (5.17) opnår vi den fordel, at vi ikke behøver at tage stilling til, hvilken af de konkrete typer input-output modeller, formlerne gælder (erhvervsfordelt anvendelse kontra komponentfordelt anvendelse etc.). Vi løser blot systemet for den samlede T -matrix, og vi kan så efter behov fylde T -matricen ud med de konkret valgte primære inputs, erhverv og endelige anvendelser.

Det er tydeligt, at pris- og mængdemodellerne (5.15) og (5.17) er duale i den forstand, at de udgør et konsistent, sammenhængende modelkompleks. Dette ses også af, at (5.15)

og (5.17) tilsammen sikrer, at

$$(5.18) \quad p_i^t t = p_i^t (I - T)^{-1} t_u = p^t t_u \quad ,$$

dvs at værdien af indstrømningen (bruttofaktorindkomsten) er lig med værdien af udstrømningen (bruttonationalproduktet). Det kan da også let vises, at pris- og mængdemodellen kan opfattes som et lineært programmeringsproblem. Lad os, for at indse dette, tage udgangspunkt i det lineære program

$$\begin{aligned} & \text{Minimer} \\ (5.19.a) \quad & p_i^t t \\ & \text{under bibetingelserne} \\ (5.19.b) \quad & (I - T)t = t_u \\ & \text{og} \\ (5.19.c) \quad & q \text{ fri} \quad . \end{aligned}$$

En optimal gennemstrømningsvektor vil altså i følge (5.19) minimere omkostningerne til primære inputs, givet at efterspørgselen t_u skal opfyldes. Problemet (5.19) er ganske vist lidt trivielt, idet matricen $(I - T)$ normalt har fuld rang, sådan at der kun er en mulig løsning for t . Dette har fået fx Dorfman m.fl.(1958) til at slække lighedstegnet i (5.19.b) til et "større end" ud fra den betragtning, at et erhverv godt kan tænkes at bruge flere ressourcer end nødvendigt. Af grunde, som vi senere skal vende tilbage til, indebærer dette imidlertid, at vi må antage priser og mængder større end nul. Da de færreste empiriske input output tabeller opfylder disse krav - og af nemhedsgrunde - skal vi her fastholde det skarpe lighedstegn.⁶⁾

For at løse (5.19) danner vi Lagrangefunktionen

$$(5.20) \quad L(t, p) = p_i^t t - p^t ((I - T)t - t_u) \quad ,$$

hvor p er en vektor af Lagrangemultiplikatorer (jf appendix 1). I optimum er gradienten af Lagrangefunktionen nul, dvs at

6. Beutel(1983) slækker lighedstegnet til et "mindre end" og opfatter problemet som et maksimumproblem. Selv om dette giver samme numeriske løsninger, er fremgangsmåden begrebsmæssigt fejlagtig.

$$(5.21) \quad dL/dt = p_i^t - p^t(I-T) = 0$$

og

$$(5.22) \quad dL/dp = t_u - (I-T)t = 0 .$$

Lagrangeligningerne (5.21) og (5.22) er netop identiske med standard pris- og mængdemodellerne (5.15) og (5.17). Bemærk, at vi alternativt kan opfatte priserne p som egentlige variable og gennemstrømningerne t som Lagrangemultiplikatorer, sådan at Lagrangeligningerne opfattes som frembragt af det duale lineære program

$$(5.23.a) \quad \begin{array}{l} \text{Maksimer} \\ p^t t_u \\ \text{under bibetingelserne} \end{array}$$

$$(5.23.b) \quad p^t(I-T) = p_i^t$$

og

$$(5.23.c) \quad p \text{ fri} .$$

Input-output modellerne er altså også ækvivalente med det lineære programmeringsproblem: Maksimer værdien af udstrømningen (bruttonationalproduktet) for givne enhedspriser på primære inputs. Identiteten (5.18) af BNP og BFI kan således ses som en konsekvens af dualitetssætningen for lineær programmering.

Da input-output tabellen repræsenterede et strømningsnetværk, og da input-output modellerne kan opfattes som et dualt par af lineære programmeringsproblemer, ligger det snublende nær at undersøge, om ikke der er tale om et par af "min cost" cirkulationsproblemer, jf kapitel 3. Men hvor i hvert fald den primale variabel plejer at være kanttilknyttet i cirkulationsproblemer, er den her knudepunktstilknyttet. Vi skal senere se, at dette forhold ikke er strukturelt betinget, men at det derimod er en konsekvens af "adfærdsligningernes" konkrete udseende, og vi skal derefter vise, hvordan input-output modellen faktisk er et "min cost" cirkulationsproblem. Inden vi tager fat på dette skal vi dog stille nogle spørgsmålstejn ved dele af den traditionelle input-output tankegang.

5.2.2. Ekvivalente formuleringer -en digression*

I dette afsnit skal vi anskueliggøre sammenhængen mellem dualitet i programmeringsproblemer og begrebet "retningsbestemt dualitet", som vi introducerede i kapitel 2. Samtidig skal vi udlede nogle alternative formuleringer af input-output modeller, som måske ikke har nogen særlig abstrakt interesse, men som vil virke overraskende på erfarne input-output brugere. Andre læsere kan roligt springe dette afsnit over.

Den normale input-output mængdemodel bestemmer gennemstrømningen t som en lineær afbildning af udstrømningen t_u ud fra en antagelse om faste inputkoefficienter, jf (5.13). Denne model er imidlertid ikke den eneste multiplikative model, vi kan lave for modellens strømme. Vi husker fra kapitel 2, at enhver orienteret graf D har en retningsdual modpart, den omvendte graf D' , som kan findes ved, at enhver pil (i,j) i grafen erstattes af en pil (j,i) . Nabomatricen for den omvendte graf, $N(D')$, var følgelig lig med den transponerede af nabomatricen $N(D)$ for den oprindelige graf. Den omvendte model af standard-mængdemodellen ovenfor bestemmer gennemstrømningen - og dermed netværkets udstrømning t_u - som en lineær afbildning af indstrømningen t_i ud fra en antagelse om faste outputkoefficienter. Formelt kan vi udlede den omvendte model ved at danne outputkoefficientmatricen

$$(5.24) \quad \overset{\parallel}{T} = (\overset{\parallel}{t}_o)^{-1} T_o \quad ,$$

som antages uafhængig af t . I $\overset{\parallel}{T}$ er det således **rækkesummerne** - ikke søjlesummerne - der normeres til 1. Analogt med udledningen af (5.15) fås den reducerede omvendte model

$$(5.25) \quad t^t = t_i^t (I - \overset{\parallel}{T})^{-1} \quad .$$

De to retningsduale modeller, som vi passende kan kalde inputmodellen og outputmodellen, er alternative måder at udnytte informationen i systemmatricen T på. Begge modeller er abstrakt set lige gode. Men det er tilsyneladende kun inputmodellen, der kan gives en økonomisk-teoretisk fortolk-

ning, idet konstansen af inputkoefficienterne kan begrundes produktionsteoretisk.

Det viser sig imidlertid, at den omvendte model kan formuleres alene ud fra inputmodellens parametre. Det skyldes følgende ækvivalens:

$$\begin{aligned}
 (5.26) \quad (\mathfrak{f}_0)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} &= ((\mathbf{I}-\mathbf{T})(\mathfrak{f}_0))^{-1} \\
 &= (\mathfrak{f}_0 - \mathbf{T}_0)^{-1} \\
 &= (\mathfrak{f}_0(\mathbf{I}-\mathbf{T}^{\#}))^{-1} \\
 &= (\mathbf{I}-\mathbf{T}^{\#})^{-1}(\mathfrak{f}_0)^{-1} \quad .
 \end{aligned}$$

Hvis vi derfor multiplicerer grundligningen for den omvendte model (5.25) fra højre med $(\mathfrak{f}_0)^{-1}$, svarende til at vi definerer t som et indeks i forhold til udgangssituationen, fås

$$\begin{aligned}
 (5.27) \quad (t^t \mathfrak{f}_0^{-1}) &= t_i^t (\mathbf{I}-\mathbf{T}^{\#})^{-1} \mathfrak{f}_0^{-1} \\
 &= (t_i^t \mathfrak{f}_0^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} \quad .
 \end{aligned}$$

Dette er en ækvivalent formulering af outputmodellen - tilsyneladende under forudsætning af konstante inputkoefficienter. Formuleringen reddes i land ved, at vektorerne t og t_i omdefineres til at være indeks i forhold til udgangssituationen. Dette rokker dog ikke ved det faktum, at den omvendte model forudsætter "konstante outputkoefficienter". Begge modeller - såvel inputmodellen som outputmodellen - kan formuleres ud fra såvel inputkoefficienterne som outputkoefficienterne. Vi kan også helt undlade at danne koefficientmatricer, idet vi kan benytte den inverterede niveaumatrix $(\mathfrak{f}_0 - \mathbf{T}_0)^{-1}$ direkte. I så fald skal hhv. udstrømningen og indstrømningen specificeres i niveau (Leontief-enheder), og modellen vil i begge tilfælde aflevere et indeks for gennemstrømningen (med basisårets t -vektor lig enhedsvektoren). Denne formulering uden koefficienter er måske abstrakt set at foretrække, fordi den er den mest symmetriske. Det er følgelig upræcist at tale om en antagelse om "faste inputkoefficienter", idet vi fx. udmærket kan formulere den sæd-

vanlige inputmodel udelukkende ved hjælp af "outputkoefficienterne".

Hidtil har vi betragtet input- og outputmodellen som alternative strømnings- dvs mængdemodeller. Men læseren vil formentlig allerede have bemærket, at den omvendte model på indeksform er identisk med den sædvanlige input-output pris-model. Vi konkluderer, at prismodellen er den retningsbestemte dual til mængdemodellen, og at prismodellen forudsætter konstant outputstruktur, mens mængdemodellen forudsætter konstant inputstruktur.⁷⁾ Dette har den interessante konsekvens, at det duale par af lineære programmer (5.19) og (5.23) umiddelbart kan opfattes som retningsbestemte dualer af hinanden.

5.2.3. Antallet af ligninger i i-o modellen

Et andet spørgsmål, der er værd at tænke nærmere over, er antallet af ligninger i modellen. Hvor mange ligninger er der i en input-output model? Mange erfarne input-output brugere vil svare, at i en normal mængdemodel er der n variable - en for hvert knudepunkt - hvoraf de n_f endelige anvendelser er eksogene, mens resten bestemmes i modellen. Følgelig er der $(n-n_f)$ ligninger i alt.

Denne betragtning er for så vidt korrekt, idet brugerens ligningssystem (5.15) notorisk kun har disse $(n-n_f)$ endogene variable. Men dybest set er betragtningen alligevel forkert, fordi ligningssystemet (5.15) er en reduceret form af et langt større system - nemlig (5.13), der indeholder en adfærdsrelation for hver (eksisterende) leverance $q_h = t_{ij}$, dvs i alt a adfærdsrelationer (en for hver kant i det åbne netværk). Hertil kommer de n tvangsbindinger (5.5).

Når input-output modellen tilsyneladende kun har $(n-n_f)$ endogene variable i (5.15), er det fordi systemet kan løses

7. I litteraturen om input-output modeller forekommer eksempler på blandede modeller, dvs at mængden af konti deles i to: En delmængde med konstant outputstruktur og en komplementær delmængde med konstant inputstruktur. Et typisk eksempel er input-output tabeller konstrueret ud fra vareteknologi-antagelsen. Man bør dog ikke blande sine antagelser uden videre, da der let kan opstå inkonsistenser.

rekursivt. Når først punkt gennemstrømningerne t er fundet ved inversion af koefficientmatricen i (5.15), kan kantstrømmene $q_h = t_{ij}$ findes ved simpel substitution i ligningen $t_{ij} = \bar{t}_{ij} t_j$. Beregningen af enkeltleverancerne q_h er altså så simpel, at de færreste tænker over, at den er en integreret del af modellen. Ydermere er det for mange brugere hovedsagelig gennemstrømningerne t , der har interesse, sådan at leverancerne q aldrig bliver beregnet eksplicit. Ikke desto mindre er og bliver der en antagelse - der skal holde - for hver af de a enkeltleverancer. Enhver, der har prøvet at analysere input-output modelleres forudsigelsesfejl, kender dette problem.⁸⁾ I modsætning til de n tvangsbindinger (5.5) vil adfærdsrelationer som (5.13) nemlig aldrig holde præcist, men kun med en vis grad af tolerance, som i praksis kan være uacceptabel. Vi skal derfor i næste afsnit vise, hvordan input-output modellen eksplicit kan opstilles med kanttilknyttede grundvariable. En sådan kanttilknyttet opstilling har aldrig været foretaget før, på trods af at dette rimeligvis er den eneste måde, man kan udvikle egentlige fejlanalyser af input-output modeller på. Af samme grund er dette emne da også temmelig forsømt i den eksisterende litteratur.

5.2.4. En kanttilknyttet input-output model

Vi så i afsnit 4.1, hvordan den lukkede input-output netværksmatrix T^* kunne skrives som et produkt af cirkulationsvektoren q og de to summationsmatricer for netværket \bar{G}_u og \bar{G}_i . Netværkets underliggende graf er entydigt fastlagt ved den udvidede incidensmatrix.

$$(5.28) \quad \bar{A} = \bar{G}_u - \bar{G}_i \quad (n \times a) .$$

Vi erindrer fra kapitel 2, at \bar{A} -matricen ikke har fuld rang, da dens søjlesummer er nul. Derfor vælger vi det tilføjede punkt "omverdenen" som reference for netværket, sådan at vi

8. I det danske modelarbejde med ADAM er det især i forbindelse med bestemmelsen af importkvoter og priser, at dette Medusahoved stikker frem.

sletter dets række i summationsmatricerne. Dette giver de reducerede strukturmatricer

$$(5.29) \quad A = G_u - G_i \quad ((n-1) \times a),$$

hvor A har fuld rang (såfremt netværket er sammenhængende). Det kan let vises, at den åbne netværksmatrix T fra (5.2) kan skrives ved hjælp af de reducerede matricer:

$$(5.30) \quad T = G_u \hat{q} G_i^t,$$

smlgn (5.2), (5.8) og (5.11).⁹⁾

Ved at lukke input-output netværket har vi opnået, at det, der før var eksterne ind- og udstrømninger for netværkets punkter (hhv. inputs y og anvendelser f), nu optræder som kantstrømme i q -vektorens "indmad", jf (5.12). Balancerestriktionerne for hver konto er nu ganske simple, nemlig at summen af kantstrømme ind i hvert punkt skal være lig med summen af kantstrømme ud af hvert punkt. Den fælles sum er punktgennemstrømningen t :

$$(5.31) \quad t = G_u q = G_i q, \quad \text{hvoraf}$$

$$(5.32) \quad Aq = 0, \quad \text{jf (5.29).}$$

Denne restriktion er velkendt fra kapitel 3, idet (5.32) jo er standardformen for de primale tvangsbindinger i et cirkulationsnetværk.¹⁰⁾

Ovenfor repræsenterede vi de eksogene udstrømninger i netværkets punkter ved vektoren $t_u = (0, 0, f)$, jf. (5.4). I det lukkede cirkulationsnetværk optræder udstrømningerne i stedet som kantstrømme, nemlig i de pile, der peger ind i referencepunktet. De eksogene strømme kan således nu repræsenteres ved kantvektoren

$$(5.33) \quad q_u = (0, 0, f) \quad (ax1),^{11)}$$

9. Forskellen på den lukkede og den åbne netværksmatrix er jo netop "omverdenens" søjle og række

10. Det kan let vises, at (5.31) medfører sumrestriktionen (5.5), jf kapitel 3, note 4.

11. Se illustrationen i figur 3.1

hvor partitioneringen er den samme som i cirkulationsvektoren q (jf. (5.12)). Det kan vises, at sammenhængen mellem de eksogene kantstrømme og de ækvivalente eksogene punktudstrømninger er

$$(5.34) \quad t_u = Aq_u, \quad (12)$$

(incidensmatricen A bruges i dette tilfælde udelukkende til at ændre den topologiske tilknytning af eksogene strømme fra kanter til punkter. Vi skal snart se flere eksempler på dette fænomen).

De resterende, endogene kantstrømme $(q - q_u)$ er en smule sværere at opstille grundligningerne for. Vi husker, at fx det h 'te element i q -vektoren er en leverance fra fx konto i til konto j . Denne leverance bestemmes, hvis den ikke er eksogen, af

$$(5.35) \quad q_h = t_{ij} = w_h t_j,$$

hvor $w_h = \bar{t}_{ij}$ er leverancens "inputkoefficient", og t_j er gennemstrømningen i konto j . På matrixform kan (5.35) skrives

$$(5.36) \quad (q - q_u) = \hat{w} G_i^t t \\ = W_{iq} t,$$

hvor w er en kanttilknyttet vektor af inputkoefficienter, t er gennemstrømningsvektoren, og indmatricen G_i sikrer, at det rigtige element i t -vektoren "spredes ud" til hver enkelt kant (indmatricen indeholder jo netop i hver søjle et ettal for det punkt, den pågældende pil går ind i). Matricen $W_{iq} = \hat{w} G_i^t$ er fordelingsmatricen, svarende til summationen $t_o = G_i q_o$, hvor q_o er cirkulationen i basisåret, jf (5.13).¹³⁾

12. Da alle eksogene kantstrømme går ind i referencepunktet, hvis række i i strukturmatricerne er slettet, er $G_i q_u = 0$. Ydermere er $G_u q_u = t_u = (0, 0, f)$, da der ved netværkets lukning blev tilføjet netop en pil pr. punktudstrømning, jf. figur 3.1.
13. I celle (h, j) indeholder fordelingsmatricen w_h , hvis pil nr. h går ind i punkt j , nul ellers. Se i øvrigt gennemgangen af fordelingsmatricer i appendix 2.

Da vi ikke i denne rapport vil støde på andre fordelingsmatricer end W_{iq} , skal vi i det følgende blot skrive W , idet indeks iq undertrykkes.

Sammen med de $(n-1)$ strukturestriktioner (5.32) bestemmer (5.36) entydigt alle strømme i input-output netværket. Vi skal eftervise dette ved at udlede den traditionelle mængdemodel af de to ligningssæt. Dette er såre enkelt, idet vi blot skal omregne (5.36) til knudepunktsform ved at præmultiplicere med A -matricen. Dette giver, ved hjælp af (5.31,32 og 34):

$$(5.37) \quad -AWt = t_u$$

som sammenholdt med (5.15) giver

$$(5.38) \quad -AW = (I-T) \quad .$$

Punktgennemstrømningerne t kan altså findes entydigt på normal vis ved inversion af (5.37), hvorefter kantstrømmene (leverancerne) i q -vektoren kan findes ved simpel substitution i (5.36):

$$(5.39) \quad q = Wt + q_u \quad .$$

Dette er netop en formalisering af den rekursive procedure, vi skitserede i punkt 3.

Vi har altså umiddelbart opnået to resultater af vores omformulering. For det første har vi fået en formel for de "manglende" input-output ligninger fra forrige punkt. For det andet har vi fået en grafteoretisk fortolkning af den traditionelle systemmatrix $(I-T)$.¹⁴⁾

Vi skal umiddelbart se et tredje resultat, der ikke er så umiddelbart indlysende. Vi finder nemlig det gamle lineære program (5.19) frem af mølposen og erstatter de mangelfulde bibetingelser (5.19.b) med tvangsbindingerne (5.31) og adfærdsrelationerne (5.39). Resultatet er det duale programpar

14. I appendix 2 er vist, hvordan udtrykket (5.39) kan fortolkes som et særligt tilfælde af begrebet en "omfordeling" af t -vektoren.

	Minimer	Maksimer
(5.40.a)	$p_i^t t$ under	$v^t q_u$ under
(5.40.b)	$Aq = 0$	$-p^t A + v^t = 0$
(5.40.c)	$q - Wt = q_u$	$-v^t W = p_i^t$
(5.40.d)	q fri	p, v frie . 15)

Nu begynder det at ligne noget, vi kender. Nøglevariablen i det duale problem er ikke længere priserne p , men derimod værditilvæksterne $v_{ij} = p_j - p_i$, jf kapitel 3, afsnit 3. Der er ingen tvivl om, at prismodellen stadig er den samme, for vi kan blot indsætte den duale tvangsbinding $p^t A = v^t$ i dualbetingelsen (5.40.c), så har vi den normale prismodel (vi husker, at $(I - T) = -AW$).

Problemparret (5.40) er det letteste at arbejde med i næsten alle henseender. Det indeholder ikke flere ligninger end de traditionelle modeller, men i modsætning til disse indeholder (5.40) en klar sondring mellem adfærdsligningerne (c) og tvangsbindingerne (identiteterne) (b). Vi skal vende tilbage til formuleringen (5.40) i kapitel 7.

I stedet for fortsat at regne os tilbage til den traditionelle model skal vi imidlertid udnytte den nye formulering (5.40) til at bevæge os endnu længere væk fra normal input-output tankegang. Vi skal nemlig helt eliminere de punkttilknyttede variable t og p fra problemparret for at bevise, at input-output modellerne er et dualt par af "min cost" cost cirkulationsproblemer af nøjagtig samme type, som vi behandlede så grundigt i kapitel 3.

5.3. Input-output og "min cost" cirkulationer

De formuleringer af input-output modellen, som vi hidtil har set, har alle haft den punkttilknyttede gennemstrømningsvektor t som primal variabel. Vi skal i dette afsnit se, hvordan modellen kan omformuleres, sådan at vi udelukkende anvender den kanttilknyttede cirkulationsvektor q som

15. Vi har lavet et lille trick af notationsmæssige hensyn, idet vi har vendt fortegnet på p -variablen (svarende til at multiplicere primalen (5.40.b) med -1). Da p er fri og ikke indgår i målfunktionen, er dette uden betydning.

primal variabel. Kun sådan kan vi nemlig bringe input-output modellen på en form, der kan jævnføres med andre netværksmodeller.

Vi skal se, at dette hamskifte ikke er så let at gennemføre, som man måske umiddelbart kunne forvente. For at kunne binde de to formuleringer sammen må vi nemlig danne et udtræk for systemets graf med rod i det universelle referencepunkt. Selv om omformuleringen af input-output modellen således i første omgang kan se ud til at gøre alting besværligere end det er, giver den et dybt indblik i problemets struktur, som vi senere skal drage fordel af.

5.3.1. De kanoniske adfærdsligninger

Den tilsyneladende letteste måde at eliminere t -variablen på er at udnytte (5.31), sådan at (5.36) kan omformuleres til

$$(5.41) \quad q - q_u = WG_i q \quad ,$$

som reduceres til

$$(5.42) \quad (I - WG_i)q = q_u \quad .$$

Det er imidlertid ikke så smart, fordi koefficient-matricen i (5.42) ikke er regulær, idet den er af dimension $(n \times n)$, men kun af rang $m = n - 1$.¹⁶⁾ De $(n-1)$ af de primale restriktioner (5.42) er derfor overflødige, dvs at de automatisk er opfyldt, når de m øvrige adfærdsligninger er overholdt. Fænomenet skyldes, at inputkoefficienterne for hver konto summer til 1, dvs at ligningen for netop en af strømme ind i hver konto i systemet kan afledes af de øvrige ligninger. Hvis vi fjerner en sådan ligning for hver af de $(n-1)$ egentlige konti i systemet, fås et uafhængigt sæt af m adfærdsligninger.

Da vi altså alligevel ikke kan undgå at tage stilling til, hvilke adfærdsligninger, der er overflødige, skal vi bide i det sure æble og eliminere t på en anden måde (der dog viser sig reelt at være den samme). Lad os starte med et

16. Se afsnittet om proportionalitetsbetingelsen i appendix

lille eksempel. Vi har et erhverv med tre inputs $q=(q_1, q_2, q_3)$, vi kan fx sætte dem til (10,20,30). Følgelig har erhvervet produktionen $t=60$. De tekniske koefficienter er $w=(w_1, w_2, w_3)$, og vi finder ved at dividere q -vektoren med t koefficienterne til at være (1/6, 1/3, 1/2). De nødvendige inputs for produktionsniveauet t er

$$(5.43) \quad q = (1/6, 1/3, 1/2)t \quad .$$

Hvordan kan vi formulere denne sammenhæng uden at bruge produktionen t som hjælpevariabel? Jo, lad os udnævne et af de tre inputs, fx q_2 , til **repræsentant** for produktionen. Vi har, at

$$(5.44) \quad q_2 = w_2 t \quad , \text{ der inverteres til}$$

$$(5.45) \quad t = q_2 / w_2 = 3q_2 \quad .$$

Ved at indsætte (5.45) i (5.43) får vi den alternative formulering

$$(5.46) \quad q = (1/6, 1/3, 1/2)q_2 / w_2 \\ = (1/2, 1, 3/2)q_2 \quad .$$

Nok om vores lille eksempel. Vi behøver faktisk ikke mere.

Vi vælger nu for hvert punkt i netværket, undtagen referencepunktet, en repræsentant blandt de pile, der peger ind i punktet. Hvis vi vælger repræsentanterne sådan, at delgrafene bestående af punkter og repræsentanter er sammenhængende, vil denne delgraf være et ud-træ for input-output systemets underliggende graf med rod i det universelle referencepunkt. Vi skal senere se, at et sådant valg er hensigtsmæssigt.¹⁾

Vi kan nu sortere og opdele cirkulationen q og inputkoefficienterne w i træet og co-træet, så $q=(q_s, q_c)$ og $w=(w_s, w_c)$. Vi har da

$$(5.47) \quad q_s = \hat{w}_s t \quad , \text{ der inverteres til}$$

1. Vi husker fra kapitel 2, at et ud-træ er en sammenhængende graf, hvis punkter alle har indgangsvalensen 1, på nær rodpunktet, der har indgangsvalensen 0.

$$(5.48) \quad t = \hat{w}_S^{-1} q_S, \text{ smlgn (5.44 og 45).}^{18)}$$

Strømmene i co-træet kan bestemmes af vores grundligninger (5.39), idet vi simpelt hen smider ligningerne for træets strømme væk:

$$(5.49) \quad q_C = W_C t + q_{uc}$$

(bemærk, at $q_{uS}=0$, da ingen af de eksogene kantstrømninger q_u , der er forskellige fra nul, kan indgå træet, fordi de peger ind i referencepunktet og derfor vil slutte en kreds).

Vi eliminerer nu t -vektoren fra (5.49) ved hjælp af træstrømmene q_S , jf (5.48), sådan at vi får de kanoniske adfærdsligninger for input-output modellen:

$$(5.50) \quad q_C = W_C \hat{w}_S^{-1} q_S + q_{uc},$$

der udgør det ønskede sæt af m uafhængige adfærdsligninger.

5.3.2. Input-output cirkulationsproblemet

De duale problemer (5.40) kan nu skrives

$$(5.51) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimer} & \text{Maksimer} \\ \text{(a)} & p_i^t \hat{w}_S^{-1} q_S & v_C^t q_{uc} \\ & \text{under} & \text{under} \\ \text{(b)} & \begin{pmatrix} A_S & A_C \\ -W_C \hat{w}_S^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S \\ q_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_U \end{pmatrix} & (p_S^t \quad v_C^t) \begin{pmatrix} A_S & A_C \\ -W_C \hat{w}_S^{-1} & I \end{pmatrix} = (p_i^t \hat{w}_S^{-1} \quad 0) \end{array}$$

Den normale mængdemodel kan udledes ved almindelige rækkeoperationer på de primale restriktioner i (5.51). Sæt fx ny række 1 lig med gammel række 1 minus A_C gange række 2. Dette giver den nye række 1:

18. Matricen \hat{w}_S er lig med træ-delen af fordelingsmatricen $W = \hat{w} G^t$. Træ-delen af indmatricen vil nemlig være en enhedsmatrix, jf appendix 2. Den viste fremgangsmåde giver derfor samme resultat som en nærmere analyse af (5.42) ville give.

$$(5.52) \quad \begin{pmatrix} A_S + A_C W_C \hat{W}_S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S \\ q_C \end{pmatrix} = -A_C q_{UC}$$

Hvis vi derefter indsætter $t = \hat{W}_S q_S$, fås den velkendte mængdemodel (5.37).¹⁹⁾

Tilsvarende kan den normale prismodel udledes ved søjleoperationer på de duale restriktioner i (5.51). Sæt fx ny søjle 1 lig med gammel søjle 1 plus søjle 2 ganget med $W_C \hat{W}_S^{-1}$. Dette giver den ny søjle 1:

$$(5.53) \quad \begin{pmatrix} p^t & v_c^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_S + A_C W_C \hat{W}_S^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = p_i^t \hat{W}_S^{-1}$$

Hvis vi yderligere multiplicerer (5.53) fra højre med \hat{W}_S , fås den normale prismodel.

Værditilvæksterne i trægrenene kan findes af de duale tvangsbindinger $v_S^t = p^t A_S$, der kan inverteres til

$$(5.54) \quad p = B_S v_S, \quad ,$$

hvor $B_S = (A_S^t)^{-1}$ er datumvejsmatricen for træet, se kapitel 2. Denne ligning kan bruges til at eliminere p-variablen fra (5.51), men vi skal gemme denne del af seancen til kapitel 7. Bemærk, at referencepunktet på normal netværksteoretisk vis er tildelt "prisen" nul.

Det er således lykkedes os at gennemføre en komplet analyse af input-output modellen ud fra kanttilknyttede grundvariable, nemlig cirkulationen q og værditilvæksterne v mod de sædvanlige punkttilknyttede variable t og p . Redskabet for denne forvandling var et ud-træ for netværkets graf med rod i referencepunktet. Vi var dog nødt til at indføre punkttilknyttede "Lagrange-multiplikatorer" - i form af prisvektoren p - for at kunne løse modellen. Vi har således ikke taget den fulde konsekvens af resultatet, idet vi ikke helt har udeladt de punkttilknyttede variable af analysen. Dette skal vi vende tilbage til i kapitel 7, men først skal vi se, hvordan den elektrotekniske netværkstradition kan give os et fast grundlag for dette forehavende.

19. Da $q_{US} = 0$ er $A_C q_{UC} = A q_U$

6. DEN ELEKTROTEKNISKE NETVÆRKSTRADITION

I dette kapitel skal vi introducere den netværksteoretiske tradition, der knytter sig til bestemmelsen af strømme og spændingsfald i elektriske netværk. Anvendelsen af orienterede grafer som redskab i dette arbejde er ganske veletableret, idet det normalt tilskrives Kirchhoff(1847) at have pioneret på feltet.¹⁾ Vores interesse for elektrisk netværksteori skyldes den kendsgerning, at ethvert elektrisk netværksproblem kan opfattes og løses som et programmeringsproblem, og omvendt kan ethvert programmeringsproblem formentlig fortolkes som et elektrisk netværksproblem, jf. Dennis(1959). Nu kan man jo spørge sig selv, om det også er nødvendigt at sætte sig ind i elektroteknisk tankegang, når vi i forvejen har kæmpet os igennem det temmelig vanskelige kapitel 3 om netværksprogrammering, og de to metoder er ækvivalente. Svaret er, at der inden for elektroteknisk tradition er udviklet særligt enkle metoder til løsning af nogle specielle, men hyppigt forekommende netværksproblemer. Den elektriske netværksteori er en gammel og gennemprøvet teoribygning, og den er let at sætte sig ind i, selv om den kan opfattes som en generalisation af "network flow" problemerne fra kapitel 3. Vi skal gennemgå fire alternative måder at opstille og løse de elektriske netværksligninger på, og vi skal i kapitel 7 vise, at de alle kan benyttes på input-output modeller.

6.1. Det elektriske netværksproblem

Et elektrisk netværksproblem vil typisk være

Givet

(a) En styklister af elektriske komponenter, 1..a,

1. De primale og duale tvangsbindinger betegnes Kirchhoffs love i elektroteknisk litteratur

(b) en bestemt måde at koble komponenterne sammen på,
bestem da fordelingen af strømme (q) og spændingsfald (v) på de enkelte komponenter i netværket.

En elektrisk komponent kan repræsenteres matematisk ved en karakteristik, der angiver spændingsfaldet over elementet som en funktion af strømmen igennem det.

$$(6.1) \quad v_i = v_i(q_i) \quad , \quad i = 1, \dots, a .$$

Vi skal i dette kapitel antage, at karakteristikken er strengt monoton, sådan at der er tale om en 1-1 korrespondence - en primal-dual kobling. Hvis et element har en karakteristik, der går igennem origo, kaldes elementet passivt, i modsat fald kaldes det aktivt, dvs at det indeholder en energikilde. Vi skal kort gennemgå behandlingen af energikilder i elektriske netværksmodeller.

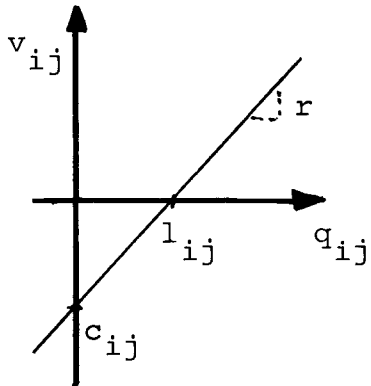
6.1.1. Energikilder i elektriske netværk

Der skelnes normalt mellem to typer af energikilder i elektriske netværk, nemlig "ideelle strømkilder", der har en lodret karakteristik, og "ideelle spændingskilder", der har en vandret karakteristik. Vi skal i overensstemmelse med notationen i kapitel 3 betegne strømkilder med bogstavet l , og spændingskilder med bogstavet c .

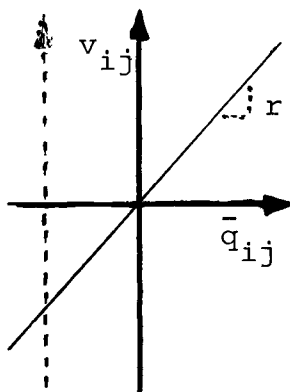
En mulig måde at behandle disse "ideelle" energikilder på er at opfatte dem som selvstændige komponenter, dvs som elementer i netværkets stykliste. Denne fremgangsmåde kræver imidlertid en lidt anden teoribygning end den, vi hidtil har benyttet, idet vi i så fald bliver nødt til at tillade multiple kanter i netværket (dvs at der kan gå mere end 1 pil fra et givet punkt i netværket til et andet).

Fremgangsmåden med multiple kanter er nok den mest udbredte i elektroteknisk litteratur, og den er fx gennemgået i Frank Nielsen(1981). Vi skal imidlertid anvende samme notation som i kapitel 3, dvs at hver kant $h=(i,j)$ opfattes som sammensat af **både** et passivt element (dvs en adfærdsligning igennem

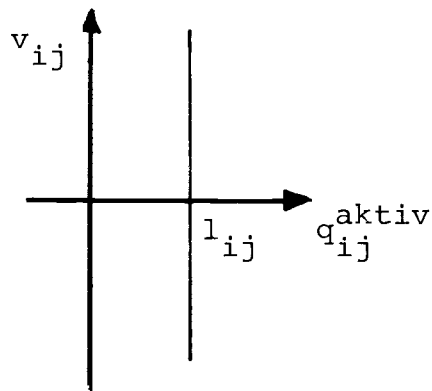
Figur 6.1. Et aktivt element og dets komponenter

a) Karakteristik for aktivt elementb) Repræsentation med ideel strøm kilde: $q_{ij} = \bar{q}_{ij} + l_{ij}$

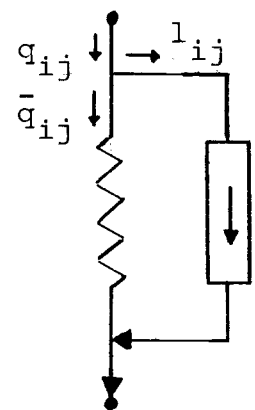
Passiv del



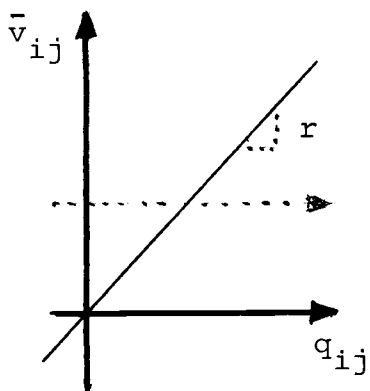
Aktiv del



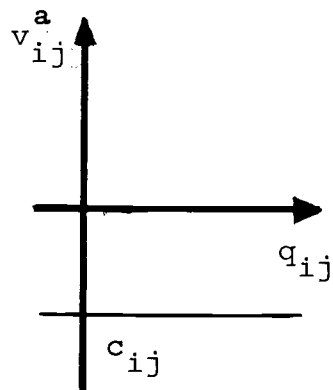
Symbol

c) Repræsentation med ideel spændingskilde: $v_{ij} = \bar{v}_{ij} + c_{ij}$

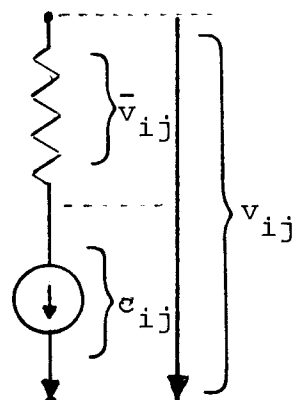
Passiv del



Aktiv del



Symbol



origo), en strømkilde l_{ij} og en spændingskilde c_{ij} . Denne repræsentation, i hvilken der højst tillades en pil fra et givet punkt til et andet, men hvor pilen til gengæld opfattes som sammensat af flere typer elementer, har en naturlig fortolkning i elektriske netværk. Dette skyldes, at elektriske energikilder (fx batterier) i praksis aldrig vil være "ideelle", men at de derimod vil have en mere eller mindre skrå karakteristisk - en såkaldt indre impedans. Et batteri er således et håndgribeligt fysisk udtryk for et sammensat, aktivt netværkselement.

Et aktivt element opfattes normalt som bestående af en passiv del koblet enten i serie med en "ideel" spændingskilde c eller i parallel med en "ideel" strømkilde l . I figur 6.1 er vist et aktivt element samt hvordan det kan spaltes i en ideel kilde og en passiv del. Vi skal i dette kapitel anvende et lidt mere generel formulering, der tillader både en strømkilde og en spændingskilde i hvert element, idet vi vil omdefinere karakteristikken til

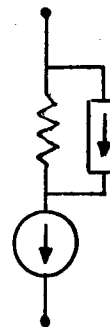
$$(6.2) \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i(\bar{q}_i)$$

hvor

$$(6.3) \quad \bar{v}_i = v_i - c_i$$

og

$$(6.4) \quad \bar{q}_i = q_i - l_i$$



Med denne formulering kan vi vælge en af kilderne frit, blot den duale kilde vælges sådan, at funktionen $\bar{v}(\bar{q})$ går igennem origo. Formuleringen ovenfor med "ideel" spændingskilde svarer så til at vælge $l=0$, mens formuleringen med "ideel" strømkilde svarer til valget $c=0$. Franksen(1981) kalder et element af typen (6.2) med både en intern strømkilde og en intern spændingskilde et "Kron'sk element" efter elektroingeniøren Gabriel Kron. Det er dog tvivlsomt, om formuleringen stammer fra Kron, og der er stillet spørgsmålstegn ved dens hensigtsmæssighed,²⁾ men under alle omstændigheder er det den formulering, der bedst kan jvnføres med den operationsanalytiske tradition fra kapitel 3. Grunden til, at kilderne ikke er entydigt bestemte i det elektriske netværksproblem, er den strengt monotone karakteristik, der

2. Se fx Bjørke(1981)

gør det muligt at transformere primale kilder til ækvivalente duale kilder (og omvendt) på en entydig måde.

6.1.2. Opstilling af netværksligningerne

Styklisten af elementer kan nu repræsenteres ved ligningssystemet

$$(6.5) \quad \bar{v} = \bar{v}(\bar{q}) \quad ,$$

hvor $\bar{q}=q-1$ og $\bar{v}=v-c$ er (ax1)-vektorer af hhv. strøm igennem og spændingsfald over elementernes (fiktive) passive del, og $\bar{v}(0)=0$.

Det elektriske netværks struktur repræsenteres ved en orienteret graf, der giver anledning til de velkendte tvangsbindinger

$$(6.6) \quad Aq = 0 \quad (\text{"Kirchhoffs knudepunktslov"})$$

$$(6.7) \quad Cv = 0 \quad (\text{"Kirchhoffs maskelov"})$$

hvor A og C er hhv. incidensmatricen og en kredsmatrix for grafen (kredse betegnes ofte "masker" i elektrisk litteratur). Ligningerne (6.5), (6.6) og (6.7) rummer samtlige restriktioner på netværkets variable q og v. Vi kan derfor formulere det elektriske netværksproblem som

Find \bar{q} og \bar{v} , sådan at ligningerne

$$(6.8) \quad \bar{v} = \bar{v}(\bar{q})$$

$$(6.9) \quad A\bar{q} = -A1$$

$$(6.10) \quad C\bar{v} = -Cc$$

alle er opfyldt, jf (6.3)-(6.7).

Vi erindrer, at knudepunktsligningerne (6.9) indebærer, at der eksisterer en entydig vektor af "maskestrømme" q_m , så

$$(6.11) \quad \bar{q} - C^t q_m = -1 \quad , \text{ jf (3.14.b) og (6.4),}$$

og kredsligningerne (6.10) indebærer, at der eksisterer en entydig vektor af knudepunktspotentialer p, så

$$(6.12) \quad \bar{v} - A^t p = -c \quad , \text{ jf (3.19) og (6.3).}$$

Ligningssystemet (6.8)-(6.10) kan vises at være identisk med Lagrangeligningerne for det duale problempar

Primal: Minimer (6.13.a) $K(\bar{q}) = V(\bar{q}) - c^t \bar{q}$ under (6.13.b) $A\bar{q} = -A1$	Dual: Minimer $K'(\bar{v}) = Q(\bar{v}) - 1^t \bar{v}$ under $C\bar{v} = -Cc$,
--	---

hvor funktionerne V og Q er defineret ved

$$(6.14) \quad \text{grad}(V(\bar{q})) = dV/d\bar{q} = \bar{v}(\bar{q}) \quad \text{og}$$

$$(6.15) \quad \text{grad}(Q(\bar{v})) = \bar{v}^{-1}(\bar{v}) \quad .3)$$

Funktionerne K og K' er såkaldte tilstandsfunktioner ("state functions") for netværket. Tilstandsfunktionerne for elektriske netværk kaldes henholdsvis "content" og "co-content". Tilstandsfunktioner er især et uundværligt redskab i forbindelse med analyse af dynamiske modeller, men det vil føre uden for vores sigte at redegøre for deres anvendelser. Den interesserede læser henvises til fx Franksen(1969) eller (1981). Vi konkluderer, at strømme og spændingsfald i et elektrisk netværk vil fordele sig sådan, at netværkets tilstandsfunktioner minimeres. I Franksen(1981) er redegjort for, hvordan dette princip er en variant af et mere generelt princip om "virtuelle forskydninger".

6.2. Lineære (Ohmske) netværk

Vi skal i det følgende beskæftige os med et specialtilfælde af det elektriske netværksproblem, nemlig det "Ohmske netværk", der kun består af modstande samt strøm- og spæn-

3. Det overlades til læseren at bevise dette ved at opstille og differentiere Lagrangefunktionerne for de to problemer. Vink: Omformuler restriktionerne, så kun den ene af strukturmatricerne optræder, dvs brug enten (6.11) eller (6.12). Lad p være Lagrangemultiplikatorer i det primale problem og lad q_m være multiplikatorer i det duale problem.

dingskilder. En (Ohmsk) modstand er et elektrisk element, hvis karakteristik er en ret linie igennem origo med hældning r . Konstanten r , der altså angiver forholdet mellem spændingsfaldet over og strømmen igennem modstanden, kaldes modstandens "impedans". Dens reciprokke værdi r^{-1} kaldes modstandens "admittans". Vi har altså

$$(6.16) \quad v_i = r_i q_i$$

der også betegnes "Ohms lov". En sådan "Ohmsk modstand" har tilstandsfunktionerne, jf (3.37) og (3.38),

$$(6.17) \quad K(q_i) = (r_i/2)q_i^2 \quad K'(v_i) = (r_i^{-1}/2)v_i^2$$

Et netværk, der udelukkende består af modstande, spændings- og strømkilder, har altså det karakteristiske duale programpar

<p style="text-align: center;">Minimer</p> <p>(6.18.a) $(\bar{q}^t R \bar{q})/2 + c^t \bar{q}$</p> <p style="text-align: center;">under</p> <p>(6.18.b) $A \bar{q} = -A1$</p>	<p style="text-align: center;">Minimer</p> <p>$(\bar{v}^t R^{-1} \bar{v})/2 + 1^t \bar{v}$</p> <p style="text-align: center;">under</p> <p>$C \bar{v} = -Cc$</p>
---	--

svarende til Lagrangeligningerne

(6.19.a)	$R \bar{q} = \bar{v}$	(primal-dual kobling)
(6.19.b)	$A \bar{q} = -A1$	(primale bindinger)
(6.19.c)	$C \bar{v} = -Cc$	(duale bindinger)

Vi skal gennemgå nogle forskellige måder at løse disse ligninger på. Først og fremmest skal vi bruge de klassiske knudepunkts- og maskemetoder.

6.2.1. Knudepunktsmetoden

Når vi ønsker at løse problemet (6.19) ved anvendelse af knudepunktsmetoden, tager vi udgangspunkt i karakteristikkkerne på admittansform, dvs

$$(6.20) \quad \bar{q} = R^{-1}\bar{v}$$

(inverteringen af impedansmatricen R er uproblematisk, da det er en diagonalmatrix). Desuden må vi formulere alle strukturrestriktioner ved hjælp af knudepunktmatricen. Dette indebærer, at vi må erstatte de duale restriktioner i (6.19.b) med de ækvivalente restriktioner (6.12), hvilket indebærer introduktion af knudepunktspotentialer p som Lagrangemultiplikatorer. Ligningerne (6.20), (6.12) og (6.19.b) kan nu samles i matrixskemaet

$$(6.21) \quad \begin{pmatrix} I & -R^{-1} & 0 \\ 0 & I & -A^t \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \bar{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ -A1 \end{pmatrix}$$

Disse $2a+n$ ligninger i lige så mange variable bestemmer entydigt netværkets primale og duale variable \bar{q} og \bar{v} samt multiplikatorerne p .

En mulig måde at løse ligningssystemet på er at invertere koefficientmatricen i (6.21) direkte. Løsningen bliver dog væsentligt lettere, hvis vi udnytter, at matricen er næsten blok-triangulær, sådan at den let kan gøres blok-triangulær ved rækkeoperationer:

(a) Række 1 multipliceres med A og trækkes fra række 3.

Resultatet er den nye række 3:

$$(6.22) \quad \begin{pmatrix} 0 & AR^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \bar{v} \\ p \end{pmatrix} = -A1$$

(b) Dernæst multipliceres række 2 med AR^{-1} og trækkes fra (6.22), sådan at vi får den nye række 3:

$$(6.23) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & AR^{-1}A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \bar{v} \\ p \end{pmatrix} = -A(R^{-1}c - 1)$$

Koefficientmatricen er nu blok-triangulær, og matrixinversionen kan følgelig indskrænkes til

$$(6.24) \quad p = (AR^{-1}A^t)^{-1}(R^{-1}c - 1) .$$

Herefter kan vores variable \bar{q} og \bar{v} findes ved simpel substitution.

Den her viste metode til løsning af det elektriske netværksproblem kaldes den klassiske knudepunktsmetode. Højresiden af (6.23) kan tolkes som "ækvivalente knudepunktsstrømkilder" for netværket, dvs eksogene nettoudstrømninger i netværkets knudepunkter, som giver samme fordeling af strømme og spændingsfald i netværket som de oprindelige, kanttilknyttede energikilder l og c . Dette indebærer, at udtrykkene (6.23) og (6.24) kan opfattes som hhv. admittansformen og impedansformen af en slags "Ohms lov for knudepunkterne". Matricen $AR^{-1}A$ kaldes derfor også for "knudepunktsadmittansmatricen".

6.2.2. Maskemetoden

Maskemetoden eller kredsmetoden er en dual løsningsmetode, der tager udgangspunkt i formulering af de strukturelle bindinger ved hjælp af en kredsmatrix, dvs (6.10) og (6.11). Her er det hensigtsmæssigt at anvende Ohms lov på impedansform

$$(6.25) \quad \bar{v} = R\bar{q}$$

Ligningerne kan samles i et matrixskema som

$$(6.26) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ -C^t & I & 0 \\ 0 & -R & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m \\ \bar{q} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Cc \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denne gang er der sjovt nok tale om et ligningssystem af en anden dimension, nemlig $2a+m$. Lige som det forrige system bestemmer (6.26) entydigt netværkets variable \bar{q} og \bar{v} , samt "maskestrømmene" q_m , der er problemets Lagrangemultiplikatorer. På samme måde som ved knudepunktsmetoden kan ligningssystemet gøres blok-triangulært ved rækkeoperationer, sådan at maskestrømmene kan findes af

$$(6.27) \quad CRC^t q_m = C(Rl - c)$$

der kan inverteres til

$$(6.28) \quad \mathbf{q}_m = (\mathbf{CRC}^t)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{R}\mathbf{l} - \mathbf{c}) \quad ,$$

hvorefter $\bar{\mathbf{q}}$ og $\bar{\mathbf{v}}$ kan findes ved simpel substitution.

Ligesom det var tilfældet med den duale knudepunktsmetode kan vi her opfatte højresiden af (6.27) som ækvivalente "kredsspændingskilder", og (6.27) kan opfattes som en slags "Ohms lov for kredsene" på impedansform. Derfor kaldes matricen \mathbf{CRC}^t også for kreds- eller maskeimpedansmatricen.

6.2.3. Andre metoder*

Symbolisk reduktion af netværkets grundligninger ved hjælp af knudepunkts- eller maskemetoden er den traditionelle måde at løse det Ohmske netværksproblem på. Der findes imidlertid en række andre metoder, hvoraf vi skal nævne nogle stykker.

Først og fremmest er der grund til at nævne de "fundamentale metoder" eller "klassedelingsmetoderne". For at gennemføre knudepunkts- og maskemetoderne måtte vi introducere hhv. potentialerne og maskestrømmene som hjælpevariable. Dette kan undgås, hvis vi i stedet klassedeler netværkets kanter i et skelet og et co-skelet og opskriver strukturrestriktionerne ved hjælp af de tilsvarende basissnitsæt og basiskredse. De primale restriktioner kan i så fald skrives

$$(6.29) \quad \mathbf{S}\bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{S}\mathbf{l}$$

eller ækvivalent

$$(6.30) \quad \bar{\mathbf{q}}_s = \mathbf{C}_s^t \bar{\mathbf{q}}_c - \mathbf{S}\mathbf{l} \quad ,$$

hvor indeks s og c markerer opdelingen i skelet og co-skelet. De duale restriktioner kan skrives

$$(6.31) \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{C}\mathbf{c}$$

eller ækvivalent

$$(6.32) \quad \bar{\mathbf{v}}_c = \mathbf{S}_c^t \bar{\mathbf{v}}_s - \mathbf{C}\mathbf{c} \quad .$$

De fundamentale kredsligninger kan nu skrives

$$(6.33) \quad \begin{pmatrix} I_s & 0 & -R_s & 0 \\ 0 & I_c & 0 & -R_c \\ 0 & 0 & I_s & -C_s^t \\ C_s & I_c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_s \\ \bar{v}_c \\ \bar{q}_s \\ \bar{q}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S1 \\ -Cc \end{pmatrix}$$

og de fundamentale snitsætninger fås tilsvarende som

$$(6.34) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_s & S_c \\ -S_c^t & I_c & 0 & 0 \\ -R_s^{-1} & 0 & I_s & 0 \\ 0 & -R_c^{-1} & 0 & I_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_s \\ \bar{v}_c \\ \bar{q}_s \\ \bar{q}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S1 \\ -Cc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Begge de fundamentale ligningssystemer (6.33) og (6.34) er af mindre dimension end de traditionelle, nemlig 2a ligninger og ubekendte mod knudepunktmetodens 2a+n og maske-matodens 2a+m. Normalt skulle vi derfor forvente, at de fundamentale ligningssystemer var at foretrække. Dette gælder imidlertid ikke generelt. For det første vil den nødvendige matrixinversion alligevel højst være af dimension (nxn) for knudepunkts- og snitsætmetoderne og (mxm) for kredsmetoderne, idet de resterende variable som vist ovenfor kan findes ved simpel substitution. For det andet er det ikke kun matrixens dimension, der er afgørende. Med moderne numeriske teknikker, der udnytter nullerne i matrixerne, til rådighed, kan det faktisk være af større betydning, hvor "tyndt" matrixerne er besat med ikke-nul elementer. Og på dette punkt har knudepunktsformuleringen i praksis vist sig at give de tyndest besatte matrixer. En anden erfaring er, at det ikke nødvendigvis svarer sig at blok-triangularisere matrixen ned til fx knudepunktsbalancen (6.23). Dette hænger sammen med, at de effektive numeriske teknikker virker bedst, når løsningsalgoritmen har så høj grad af "frihed" som muligt til at finde en optimal løsningsrækkefølge. Så snart vi begynder at manipulere på struktursystemet (6.21), tabes imidlertid en del af denne frihed, og dette kan medføre tab af effektivitet. I denne forbindelse bør det bemærkes, at både knudepunktsadmittans- og maskeimpedansmatrixerne er symmetriske, og at de derfor næppe er tilstrækkeligt tyndt besatte til at kunne anvendes i en effektiv løsningsalgoritme.

Der er også udviklet "hybride" metoder, dvs metoder, som tager udgangspunkt i elementligningerne på blandet impedans-/admittansform. Hybride metoder er særdeles velegnede til analyse af dynamiske systemer, idet vi ved passende valg af impedans-/admittansform kan undgå at arbejde med integral-operatorer, jf. i øvrigt Branin(1977).

Til sidst skal nævnes, at der også findes metoder, baseret på "topologisk dualitet", som er en anden type dualitet end vores. Et eksempel på dette er "regionsmetoden", jf. fx Franksen(1978). Denne type metoder kan imidlertid kun anvendes på netværk, hvis grafer er planare (dvs at grafen kan tegnes på fx et stykke papir, uden at nogen kanter krydser hinanden).⁴⁾

6.2.4. Roth's diagram - en topologisk oversigt

I sin efterhånden klassiske artikel fra 1955 har J. P. Roth givet en elegant "algebraisk-topologisk" oversigt over netværksproblemets struktur. Han skelner imellem to bestanddele af netværksproblemet:

- (a) En topologisk struktur, dvs en lineær graf
- (b) En algebraisk struktur, der "påtrykkes" grafens elementer.

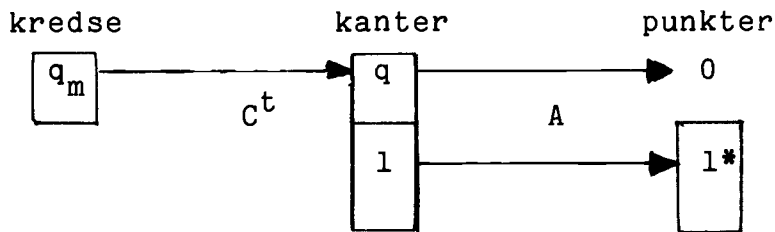
Roth opfatter netværket som bestående af tre typer elementer, nemlig punkter, kanter og kredse. Vi kan nu knytte variable, fx tal, til netværkets elementer på to principielt forskellige måder.

Den første måde, vi kan knytte tal til grafen på, er at knytte et vilkårligt tal til hver kreds i grafen. Mængden af disse tal repræsenteres ved en m -vektor q_m . Ved hjælp af kredsmatricen kan vi nu knytte en a -vektor af afledede tal $q = C^t q_m$ til grafens kanter. Ud over de afledte størrelser q kan vi til hver kant knytte et vilkårligt tal. Mængden af disse repræsenteres ved vektoren l . Ved hjælp af incidensmatricen A kan vi nu knytte to afledede n -vektorer til grafens punkter: En vektor $l^* = Al$ og en hulvektor $= AC^t q_m$. Sammenhængen mellem disse variable af type 1 kan illustreres

4. En alternativ måde at udnytte "topologisk dualitet" på er at generalisere til matroider, se fx Frank Nielsen(1981)

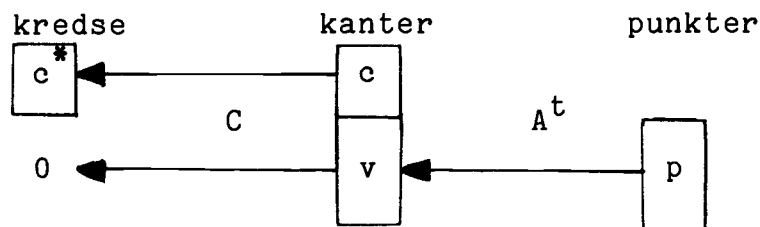
i et diagram som i figur 5.2, hvor en pil repræsenterer en præmultiplikation.

Figur 5.2. Primal tilknytning af tal til grafen



Den anden måde består i, at vi til hvert ikke-datum punkt i grafen knytter et vilkårligt tal. Mængden af disse tal repræsenteres ved en $(n-1)$ -vektor p . Ved hjælp af knudepunktsmatricen A kan disse tal omregnes til afledte kanttilknyttede variable $v = A^t p$. Igen kan vi supplere med en vektor af vilkårlige, kanttilknyttede tal c . Ved hjælp af kredsmatricen C kan vi nu knytte to afledede vektorer til grafens kredse: En vektor $c^* = Cc$ og en nulvektor $= CA^t p$. Disse transformationer kan illustreres som i figur 5.3.

Figur 5.3. Dual tilknytning af tal til grafen

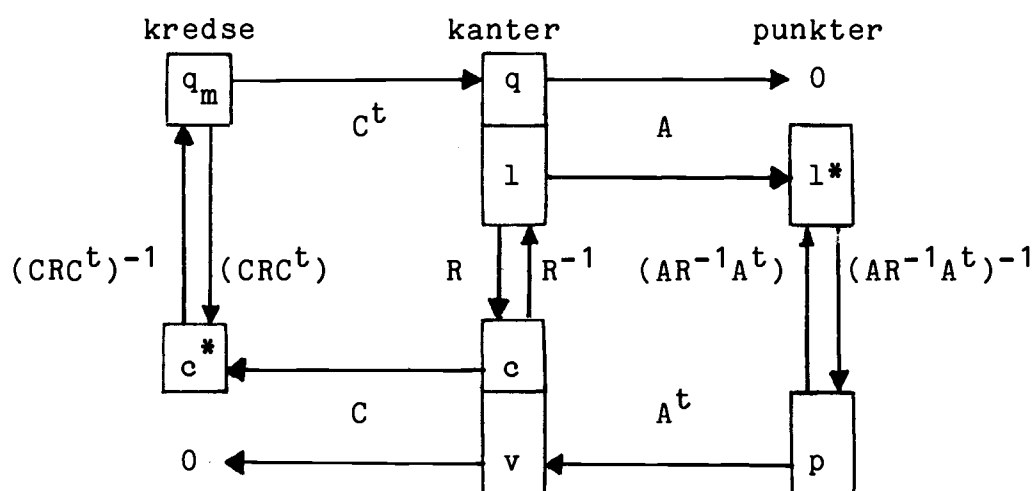


Bemærk, at uanset hvilke tal, vi tilordner punkterne i grafen, må de deraf afledte kantstørrelser summe til nul i en lukket kreds p.g.a. den fundamentale nulrelation $AC^t=0$. Omvendt må kantstørrelser, der er afledt af vilkårlige kredstilknyttede størrelser, nødvendigvis summe til nul i et givet knudepunkt.

Den algebraiske struktur, vi har afbildet i figurerne 5.2 og 5.3 er temmelig løs, idet vi jo ikke har bundet variable af type 1 og type 2 sammen på nogen måde. Det elektriske netværksproblems specifikke struktur kommer imidlertid først frem, når vi binder de to typer afledte kantvariable til hinanden med en 1-1 transformation, i dette tilfælde en lineær primal-dual kobling. Resultatet af en sådan kobling -

de to klassiske løsningsmetoder - er vist i figur 5.4.⁵⁾

Figur 5.4. Roths diagram



Roths fremstilling har - ud over dens smukke illustrative virkning - vist sig hensigtsmæssig i forbindelse med eksistens- og entydighedsbeviset for netværkets løsningsvektor, samt ikke mindst i forbindelse med generalisation af netværksteorien til at omfatte elementer af højere dimensionalitet, fx flader og rum. En let læst behandling af det 3-dimensionale netværksproblem og dets mange anvendelser er givet i Branin(1977).

6.2.5. Generaliseringsmuligheder

Den netværksmodel, vi har gennemgået i de forrige afsnit, er uhyre simpel. Denne simple struktur er først og fremmest en følge af de lineære elementarligninger

$$(6.35) \quad v_i = r_i q_i \quad .$$

Den udviklede metode er imidlertid så robust, at den stort set holder uforandret, selv om en række af modellens restriktioner lempes. Vi skal se en række eksempler.

Et meget almindeligt forekommende brud på standardanta-

5. De alternative klassesdelingsmetoder fremkommer umiddelbart, hvis vi erstatter matricerne C og A med de tilsvarende fundamentale kreds- og snitsætmatricer

gelserne er "overkrydsningseffekter", dvs at fx spændingsfaldet over en kant ikke alene afhænger af strømmen igennem den, men også af strømmen igennem andre kanter:

$$(6.36) \quad v_i = \sum_j r_{ij} q_j \quad ,$$

hvor r_{ij} er såkaldte krydsimpedanser, svarende til det økonomiske begreb krydspriselasticiteter. Denne lempelse svarer blot til, at vi tillader elementerne uden for diagonalen i impedansmatricen R at være forskellige fra nul. Alle netværkets grundligninger er uforandrede, og så længe impedansmatricen er positiv definit, vil netværket stadig have entydige løsningsvektorer.

En anden type overkrydsningseffekter er lineære bånd på netværkets variable af samme kategori, fx

$$(6.37) \quad q_i = \sum_j t_{ij} q_j \quad ,$$

der fortolkes elektrisk som en "ideel transformator". Transformatoren overfører energi fra den ene af netværkets kanter til den anden uden om de strukturelle bindinger, men på en sådan måde, at den ikke tilfører det samlede netværk energi. Vi skal senere vende tilbage til denne type restriktioner, idet input-output modellens adfærdsligninger jo netop er af denne type. Her skal vi blot notere os, at ligninger af typen (6.37) bevirker, at den ene af enhedsmatricerne i netværkets grundligninger, fx matrix (1,1) i (6.21), må erstattes af en koefficientmatrix. Dette betyder, at netværket ikke kan løses helt så elegant som ellers, men dog stadig ud fra inversion af grundligningerne.

En tredje slags lempelse af forudsætningerne er funktionsformen. Elementligningerne kunne fx have formen

$$(6.38) \quad v_i = f_i(q_i) \quad , \text{ hvor } f_i' > 0.$$

Ikke-lineære elementligninger vil ikke påvirke formuleringen af netværksligningerne, fx (6.21), men ligningerne vil ikke længere kunne løses ved matrixinversion. I stedet må vi anvende numeriske procedurer, fx Gauss-Seidel algoritmen. Vi kan også tillade elementligningerne at være stykvist lodret-

te og vandrette, jf. kapitel 3, men i så fald vil det ofte være en fordel at opfatte netværksproblemet eksplicit som et programmeringsproblem, jf. fx Franksen(1981) for en grundig gennemgang.

Et andet hovedemne for generaliseringer er opfattelsen af energikilderne i modellen. Vi har indtil nu konsekvent opfattet energikilderne som fundamentalt kanttilknyttede, men der findes mange alternativer. Prager(1965) har fx en interessant formulering, der udelukkende omfatter knudepunktstilknyttede kilder. Han klassedeler netværkets punkter i to klasser: Den ene klasse X_p har eksogene potentialer p_p , men endogene knudepunktslækager l_p^* . Den komplementære klasse X_1 har eksogene lækager l_1^* , men endogene potentialer p , dvs

$$(6.39) \quad p = \begin{pmatrix} p_p \\ p_1 \end{pmatrix}$$

og

$$(6.40) \quad l^* = \begin{pmatrix} l_p \\ l_1^* \end{pmatrix}$$

Prager viser, at netværkets tilstandsfunktioner nu er

$$(6.41) \quad K(\bar{q}) = V(\bar{q}) - p_p^t l_p$$

og

$$(6.42) \quad K'(\bar{v}) = Q(\bar{v}) - l_1^{*t} p_1 \quad ,$$

smlgn (6.13.a).

Pragers formulering kan opfattes som en generalisering af den almindelige elektriske metode, idet X_p normalt kun består af referencepunktet med eksogent potentiale nul, mens X_1 er resten af netværkets punkter med endogene potentialer. Metoden har stor interesse i forbindelse med input-output modeller, hvor X_p omfatter de primære inputs med givne priser og endogene indstrømninger, mens X_1 omfatter erhvervene (med indstrømning nul) og de endelige anvendelser (med givne positive lækager). En meget detaljeret behandling af kilderne i det elektriske netværksproblem er givet i Bjørke(1981).

Til sidst skal vi nævne den nok vigtigste lempelse af forudsætningerne. De hidtil gennemgåede modeller har været statiske, idet tiden ikke har indgået eksplicit i nogen af grundligningerne. Dette svarer i elektrisk terminologi til,

at vi kun har behandlet jævnstrøms- eller DC-netværk. Den udviklede netværksmodel lader sig imidlertid let generalisere til at omfatte dynamiske (transiente) elementligninger af formen

$$(6.43) \quad v_i = L_i(dq_i/dt)$$

eller

$$(6.44) \quad q_i = C_i(dv_i/dt) \quad .$$

De elektriske komponenter, der opfylder hhv (6.43) og (6.44), kaldes en spole og en kondensator. Den abstrakte betydning af at tillade sådanne dynamiske ligninger er indlysende.

Dynamiske netværksmodeller, der svarer til det elektriske begreb vekselstrøms- eller AC-netværk, kan løses fuldstændig analogt med de statiske netværksmodeller. Matricer og variable kommer blot til at bestå af komplekse tal, hvis realdel er den statiske løsning, mens den imaginære del er transienten, dvs afvigelsen fra den statiske værdi. Omkostningerne ved at løse problemet er imidlertid afhængige af, om vi vælger elementligningernes impedans- eller admittansform, ligesom valget af skelet for grafen ikke længere er uden betydning for beregningsomkostningerne. I Franksen(1978) er vist, hvordan det dynamiske netværksproblem trin for trin kan formuleres og løses helt analogt med det statiske. En mere omfattende fremstilling er Bryant(1967).

En alternativ og mere generel metode er at opstille dynamiske tilstandsligninger for netværket. Denne meget elegante og veludviklede teori kaldes "State space analysis", og den er så omfattende, at det er umuligt at gennemgå den her. En kompakt, men let læst introduktion er givet af Koenig og Frame(1964). En omfattende fremstilling er Timothy og Bona(1968).

Endelig kan man overveje, om grafer og matricer overhovedet er tilstrækkeligt generelle værktøjer til analyse af netværk. På baggrund af gennemgangen i denne rapport kan det måske virke overraskende, at operationsanalytikere og elektroingeniører er enige om, at det er de ikke. Det er nemlig ikke muligt at opnå helt tilfredsstillende dualitet mellem kreds- og snitsætbegreberne, med mindre man indskræn-

ker sig til at behandle planare grafer eller generaliserer begreberne grafer og matricer til hhv. grafoider og matroider, se fx Frank Nielsen(1981) eller den klassiske artikel af Minty(1966). En gennemgang af matroideteori ligger dog milevidt fra sigtet med denne rapport. Vi skal trøste os med, at matroideteori ikke er et alternativ til, men en generalisering af matrix- og grafteori, og den kan alligevel næppe tilegnes af personer, der ikke har et solidt kendskab til disse discipliners grundbegreber.

7. NETVÆRKSTEORI OG INPUT-OUTPUT

Da input-output modellerne som vist i kapitel 4 kan opfattes som strømningproblemer, har netværksteorien særligt mange anvendelser i forbindelse med input-output analyser.

I dette kapitel skal vi vise, hvordan hver enkelt af de alternative løsningsmetoder fra kapitel 6 har en input-output teoretisk pendant, og vi påpeger nogle oplagte generaliseringsmuligheder. Det viser sig til vores fortrøstning, at den traditionelle metode til opstilling og løsning af input-output modeller givetvis er den mest effektive af de fire grundmetoder. Til gengæld kan den traditionelle metode ved hjælp af den generelle netværksmetode udvides og suppleres på en række punkter. Nogle af de oplagte muligheder præsenteres i afsnit 3.

7.1. De fire formuleringer

7.1.1. Knudepunktsmetoden

Den traditionelle måde at løse input-output modellerne på svarer nøje til den klassiske knudepunktsmetode til løsning af elektriske netværksproblemer. Blot opstår der nogle mindre forskelle på grund af "adfærdsrelationernes" forskellige

udseende i de to modeltyper. Men vi skal se, at den grundlæggende metode er den samme.

Formuleringen bliver enklest, hvis vi bibeholder punkt-gennemstrømningerne $t = G_i q$ som hjælpevariable i det primale problem. Vi tager derfor udgangspunkt i elementligningerne fra (5.39):

$$(7.1) \quad q = W t + q_u$$

samt de velkendte tvangsbindinger

$$(7.2) \quad A q = 0$$

Ligningerne (7.1) og (7.2) kan sammenfattes til

$$(7.3) \quad \begin{pmatrix} I & -W \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_u \\ 0 \end{pmatrix}$$

De tilsvarende duale restriktioner er, jf (5.40),

$$(7.4) \quad \begin{pmatrix} I & A^t \\ -W^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_i \end{pmatrix}$$

Lagrangeligningerne (7.3) og (7.4) kan nu samles i et kompakt ligningssystem, der svarer til (6.21) for det elektriske netværk:

$$(7.5) \quad \begin{pmatrix} I & -W & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & A^t \\ 0 & 0 & -W^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ t \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_u \\ 0 \\ 0 \\ p_i \end{pmatrix}$$

Det ses, at ligningssystemet består af to diagonalblokke, mængdedelen og prisdelen. Disse blokke kan løses uafhængigt af hinanden. Ved hjælp af de velkendte rækkeoperationer fås det ækvivalente system

$$(7.6) \quad \begin{pmatrix} I & -W & 0 & 0 \\ 0 & AW & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & A^t \\ 0 & 0 & 0 & W^t A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ t \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_u \\ -Aq_u \\ 0 \\ p_i \end{pmatrix}$$

Ligningssystemet (7.6) er hverken mere eller mindre end et meget kompakt udtryk for samtlige sammenhænge, der indgår i de traditionelle mængde- og prismodeller. Systemets række 2 og 4 kan vi betegne knudepunktsbalancerne, nøjagtig som vi gjorde med de tilsvarende knudepunktsligninger i kapitel 6.

7.1.2. Maskemetoden

I forrige kapitel så vi, hvordan det elektriske netværksproblem kunne løses på en alternativ måde, nemlig ved brug af den "klassiske maskemetode". En fuldstændig tilsvarende procedure kan benyttes til at løse input-output modellens ligninger. Dette kræver blot, at tvangsbindingerne udtrykkes alene ved hjælp af en kredsmatrix for systemets graf. Såle-

des kan de primale tvangsbindinger (7.2) gives den ækvivalente formulering

$$(7.7) \quad q = C^t q_m \quad , \text{jf (3.14.b)},$$

hvor q_m er en entydig m -vektor af "maskestrømme". De duale tvangsbindinger $v = A^t p$ kan tilsvarende skrives

$$(7.8) \quad C v = 0 \quad , \text{jf (3.19)}.$$

Maskemetoden lader sig lettest gennemføre, hvis vi anvender de primale elementligninger på kanonisk form, dvs

$$(7.9) \quad q_c = W_c \hat{W}_s^{-1} q_s + q_{uc} \quad , \text{jf (5.50)},$$

hvor q_s er strømmene i de kanter, der tilhører et ud-træ fra referencepunktet (et ud-skelet), og q_c er strømmene i det komplementære co-træ. Tilsvarende anvendes den kanoniske form på den primale målfunktion, jf (5.51).

Vi kunne nu løse "maskeligningerne" på samme måde som knudepunktsligningerne, dvs ved at sætte (7.7) og (7.9) sammen til et kompakt system, opskrive de tilsvarende duale restriktioner, kombinere de to sæt restriktioner og til sidst bearbejde det kombinerede system med rækkeoperationer. Dette er den rigtige måde at få samtlige dualitetsforhold frem på, men metoden har den ulempe, at den gør problemet lidt mere indviklet, end det behøver at være. Vi skal derfor i stedet bruge den simple procedure, at vi indsætter (7.7) i elementligningerne (7.9), sådan at vi får

$$(7.10) \quad C_c^t q_m = W_c \hat{W}_S^{-1} C_S^t q_m + q_{uc} \quad ,$$

der kan løses til

$$(7.11) \quad q_m = (C_c^t - W_c \hat{W}_S^{-1} C_S^t)^{-1} q_{uc} \quad .$$

Herefter kan q -vektoren findes af (7.7). Ligning (7.11) er den primale "kredsbalance" for input-output systemet.

Den tilsvarende duale kredsbalance kan findes, hvis vi eliminerer vektoren q_s fra den primale målfunktion ved hjælp af (7.7). Dette giver

$$(7.12) \quad (C_c - C_S \hat{W}_S^{-1} W_c^t) v_m = C_S \hat{W}_S^{-1} p_i \quad ;$$

Det kan vises, at $v_m = -v_c$. Herefter kan værditilvæksterne i trægrenene findes af

$$(7.13) \quad v_s = \hat{W}_S^{-1} (p_i - W_c^t v_c) \quad .$$

Selv om kredsbalancerne således er veldefinerede også i input-output sammenhæng, vil de næppe nogensinde blive brugt til noget. De giver til praktiske formål et alt for stort beregningsarbejde, idet input-output matricer altid har et relativt stort antal kanter ($m \gg n$), og samtidig er de ikke så teoretisk tilfredsstillende som de fundamentale kredsbalancer, vi skal udlede i næste afsnit.

7.1.3. De fundamentale metoder*

Såvel maskemetoden som knudepunktsmetoden forudsætter, at vi introducerer kreds- eller punkttilknyttede hjælpevariable. Dette kan imidlertid undgås, hvis vi i stedet benytter os af de fundamentale metoder - eller "klassedelingsmetoderne", som de også kaldes. For at kunne løse input-output ligningerne med en af de fundamentale metoder må vi dele mængden af kanter i systemets graf i to klasser: et udspændende træ og dets komplementære co-træ. Derefter må vi ved hjælp af det valgte træ definere grafens fundamentale kreds- og snitsætmatricer. Valget af træ i grafen er arbitrært - også i input-output sammenhæng. Men af overskuelighedshensyn skal vi foreløbig vælge at benytte et ud-træ fra grafens universelle referencepunkt, sådan at elementligningerne for grafens co-træ samtidig udgør et maksimalt uafhængigt sæt af "adfærdsrelationer" for grafens kanter.

Vi husker, at de primale tvangsbindinger kan udtrykkes som

$$(7.14) \quad S q = 0 \quad ,$$

hvor S er en fundamental snitsætmatrix (der jo er lig med $A_t^{-1}A$). Som adfærdsrelationer benytter vi de "kanoniske elementligninger"

$$(7.15) \quad q_c = W_c \hat{W}_s^{-1} q_s + q_u^c \quad .$$

Vi kan nu opstille de kompakte snitsætligninger som

$$(7.16) \quad \begin{pmatrix} I_S & -\hat{W}_S^{-1} W_C^t & 0 & 0 \\ S_C^t & I_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_S & S_C \\ 0 & 0 & -W_C \hat{W}_S^{-1} & I_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_S \\ v_C \\ q_S \\ q_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{W}_S^{-1} p_i \\ 0 \\ 0 \\ q_{uc} \end{pmatrix}$$

Ved hjælp af de sædvanlige rækkeoperationer kan systemet løses til at give de duale snitsætbalancer (eller trægrensbalancer):

$$(7.17.a) \quad (I_S + S_C W_C \hat{W}_S^{-1}) q_S = -S_C q_{uc}$$

ensbetydende med, da $I_S = S_S$ og $q_{us} = 0$, at

$$(7.17.b) \quad S W \hat{W}_S^{-1} = -S q_u \quad ,$$

og dualt

$$(6.18) \quad \hat{W}_S^{-1} W^t S^t v_S = \hat{W}_S^{-1} p_i \quad .$$

smlgn (7.6).

De fundamentale kredsligninger kan tilsvarende skrives

$$(7.19) \quad \begin{pmatrix} I_S & -\hat{W}_S^{-1} W_C^t & 0 & 0 \\ -C_S & I_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_S & -C_S^t \\ 0 & 0 & -W_C \hat{W}_S^{-1} & I_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_S \\ v_C \\ q_S \\ q_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{W}_S^{-1} p_i \\ 0 \\ 0 \\ q_{uc} \end{pmatrix}$$

Bemærk, at de fundamentale kredsligninger er identiske med de fundamentale snitsætligninger, bortset fra at vi har indsat den grundlæggende sammenhæng $C_S = -S_C^t$, jf (2.45).

Forskellen på de to metoder består alene i, at mens snitsætbalancerne findes på den måde, at vi ved rækkeoperationer eliminerer de kredstilknyttede variable v_c og q_c , finder vi kredsbalancerne ved omvendt at eliminere de snitsæt-tilknyttede variable v_s og q_s . Kredsbalancerne bliver følgelig

$$(7.20) \quad (I_c - W_c \hat{w}_s^{-1} C_s^t) q_c = q_{uc}$$

og

$$(7.21) \quad (I_c - C_s \hat{w}_s^{-1} W_c^t) v_c = C_s \hat{w}_s^{-1} p_i ,$$

smlgn (7.10) og (7.11).

Hidtil har vi forudsat, at det valgte træ for grafen var et ud-træ fra referencepunktet, fordi dette valg af træ gav de enkleste udledninger. Men det ses umiddelbart, at et hvilket som helst træ kunne være valgt i stedet, idet såvel strømme, værditilvækster som strukturmatricer for et sådant træ kan findes ved en 1-1 lineær transformation af de størrelser, vi har anvendt ovenfor. Derimod ligger det fast, at partitioneringen af elementligningerne (og dermed af W -matricen i (7.20) og (7.21)) skal svare til et ud-træ, jf kapitel 5. Derfor er og bliver det mest hensigtsmæssigt at anvende et ud-træ som vist, sådan at vi slipper for at definere to træer, men kan anvende det samme træ til begge formål.

De fundamentale metoder er næppe beregningsteknisk konkurrencedygtige med knudepunktsmetoden. Den fundamentale kredsbalance er ubrugelig, fordi den kræver inversion af en (mxm) -matrix, og selv om den fundamentale snitsætbalance kan løses ved en matrixinversion af samme størrelse som knudepunktsbalancens, vil knudepunktsmetoden alligevel være at

foretrække, fordi den matrix, der skal inverteres, indeholder flere nuller. Mens en kant jo er incident til netop to punkter, kan den være incident til et langt større antal snitsæt (såfremt den ikke er en trægren).¹⁾ Derimod er de fundamentale metoder langt de letteste at behandle i forbindelse med teoretiske udledninger, idet dualitetsforholdene mellem de involverede strukturmatricer er så let gennemskuelige.

Garvede input-output brugere kan altså ånde lettet op. Den traditionelle knudepunktsorienterede måde at opstille og løse input-output modeller på er stadig nummer et. Ellers var den vel også blevet forladt for mange år siden.

7.2. Generaliseringsmuligheder

Den opstillede model, der kombinerer pris og mængdemodelerne i en model, kan generaliseres på et næsten ubegrænset antal måder. Disse generaliseringsmuligheder kan systematiseres nogenlunde på samme måde, som vi gjorde med de elektriske netværksmodeller i kapitel 6, afsnit 2.5, og vi skal ikke gentage dem her. Vi har opbygget et begrebsapparat - en kokebog, der kan anvendes til at blande en nærmest vilkårlig biksemad af lempede adfærdsforudsætninger som fx "udbudsdrevne erhverv", kapacitetsgrænser, "regimeskift" etc. Men foreløbig er der rigeligt at fordøje, så vi skal ikke konstruere sådanne eksempler her. Der er dog grund til at nævne to særligt lovende områder.

1. Sjovt nok er dette i overensstemmelse med Branin's erfaringer med elektriske netværk, se Branin(1977)

Det første område er introduktion af prisfølsomheder i modellen. Traditionel produktionsteori siger os jo, at efterspørgselen efter produktionsfaktorer ikke blot afhænger af produktionen, men også af de relative priser på faktorerne. Dette kræver, at vi introducerer priselasticiteter i modellen, svarende til impedanser og krydsimpedanser i det elektriske netværksproblem. Principielt skulle dette kunne løses blot ved at erstatte en eller flere af nulmatricerne i (7.6) med en positiv definit og symmetrisk matrix af prisfølsomheder. Helt så ligetil er det nu ikke, bl.a. fordi det i økonomi ikke er værditilvæksterne $v_{ij}=p_j-p_i$, men derimod de relative priser p_j/p_i , der normalt indgår i adfærdsligningerne. Disse problemer er næppe værre, end at de let kan løses, fx ved linearisering, men der er ikke afsat ressourcer til at gøre det her.

Et andet meget lovende område er anvendelse af dynamisk netværksteori på input-output modeller. Der findes en særdeles solid tradition for dynamisk analyse af elektriske netværk, nemlig i forbindelse med vekselstrømsnetværk (AC-netværk). Samtidig findes der en knapt så solid tradition for dynamisering af input-output modeller. Der er formentlig mange gevinster at hente ved eksplicit at opstille en dynamisk input-output model som en netværksmodel. Dette kunne fx gøres ved at opstille dynamiske tilstandsfunktioner for modellen, jf den korte introduktion af Koenig og Frame(1964) eller den omfattende fremstilling af Timothy og Bona(1968). En alternativ mulighed for lineære modeller er at anvende komplekse matricer, jf fx Franksen(1978a). En sådan opstilling vil dog falde uden for denne rapports rammer.

7.3. Resultater og perspektiver

I dette afsnit vil vi kort forsøge at vurdere betydningen af de udviklede resultater. De vigtigste resultater er uden tvivl dels den begrebsmæssige afklaring, dels samlingen af en række problemer og modeller, der ikke umiddelbart ser ud til at have noget med hinanden at gøre. De praktiske resultater må så komme hen ad vejen, efterhånden som det forbedrede begrebsapparat får lov at gøre sin virkning på konkrete problemstillinger. Der kan dog allerede nævnes et par eksempler.

I Asger Olsen(1981) og (1984) er påvist, hvordan nogle af denne rapports indledende resultater har kunnet anvendes med stor styrke i forbindelse med fastlæggelsen af aggregeringsniveauer for den danske økonometriske model ADAM, og i forbindelse med det teoretiske grundlag for konstruktion af input-output tabeller ud fra detaljerede varebalancer.²⁾

Ingen af disse resultater benytter dog de videregående resultater fra denne rapport - her tænkes især på dualitetsresultaterne. Et oplagt emne for anvendelsen af disse er at undersøge, hvilke konsekvenser udbygningen af prismodellerne, jf ligning (1.29) og (1.30), har for den duale mængdemodel. Vi husker fra kapitel 1, at standard prismodellen har eksogen enhedsrestindkomst. Dualen til dette er, at værdien af restindkomsten indgår i målfunktionen for det primale problem. Begge disse forhold er uheldige: At der skulle være fast restindkomst pr. produceret enhed er en uheldig adfærdsantagelse, og at virksomhederne skulle minimere værdien

2. En artikel om det såkaldte valg af teknologiantagelse er under udarbejdelse.

af restindkomsten er direkte tåbeligt. I de prismodeller, der anvendes i Danmark, er restindkomsten pr. enhed da også gjort endogen, jf de to nævnte ligninger. Spørgsmålet er bare, hvilke konsekvenser dette bør have for den duale mængdemodel.

Et sidste punkt skal nævnes her, nemlig analyser af input-output modellens forudsigelsesfejl. Dette emne er berørt i kapitel 5, især i afsnittet om antallet af ligninger i input-output modellen. Det er ikke forfatteren bekendt, at nogen endnu har foretaget en systematisk undersøgelse af input-output modellernes forudsigelsesfejl. Der er dog foretaget visse indledende forsøg i den retning i Modelgruppen i Danmarks Statistik.³⁾ Disse forsøg skulle kunne udvikles yderligere på baggrund af resultaterne i kapitel 5.

De mere generelle økonomiske anvendelser af netværksteori er omtalt i kapitel 4. Et enkelt forhold skal dog nævnes her, nemlig at den matematik, der anvendes i analyser af Markov-kæder, jf kapitel 3, er fuldstændig isomorf med input-output modellens. Det kunne derfor være fristende at prøve at anvende dualiseringsprincippet også på Markov-kæder. Hvilken modeltype, der ville komme ud af dette, er vanskeligt at forudsige.

3. Se Anita Lindberg(1984) eller Asger Olsen(1985)

APPENDIX 1. DUALITET I PROGRAMMERINGSPROBLEMER

Programmeringsproblemer

Et programmeringsproblem er et problem af typen:

Find en optimal vektor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, sådan at målfunktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ minimeres blandt alle mulige vektorer x . Mængden af mulige vektorer er de vektorer i R^n , der opfylder et antal bibetingelser i form af uligheder af typen $g_j(x) \geq 0$, $j=1 \dots m$.

Vi skal mere formelt skrive

- Minimer
- (1.a) $f(x)$
- under bibetingelsen
- (1.b) $G(x) \geq 0$
- hvor
- (1.c) $x \geq 0$,

idet vi anvender notationen $G(x) \geq 0$ for $g_j(x) \geq 0$, $j=1 \dots m$.

Denne definition af et programmeringsproblem er mere generel, end den virker ved første øjekast. For eksempel kan

bibetingelserne også være ækvivalensrestriktioner af typen $G(x)=0$, idet en sådan ækvivalens kan erstattes af to uligheder af formen $G(x)\geq 0$ og $-G(x)\geq 0$. Formuleringen dækker også tilfælde, hvor x kan være negativ, idet vi kan erstatte en sådan fri variabel x med differensen (x_+-x_-) , hvor x_+ og x_- er ikke-negative og altså opfylder (1.c).

Normalt antages, at målfunktionen (1.a) er konveks, og at mængden af mulige løsninger, defineret ved (1.b og c), er konveks. Dette betyder nemlig, at et stationært punkt for f vil være et et globalt minimum. Hvis f er strengt konveks, vil det være entydigt. Vi skal dog ikke gå i detaljer med eksistenssætninger mm. her.

Det viser sig ofte, at programmeringsproblemet (1) har et dualt problem, der kan opfattes som en komplet, alternativ beskrivelse af den samme fysiske situation som det primale problem (1). Ofte viser det sig tillige, at løsningen af det ene problem indebærer en implicit løsning af det andet. Som et eksempel på dette skal vi i næste afsnit gennemgå det særlige tilfælde, hvor alle bibetingelser er ækvivalenser.

Maksimering under ækvivalensrestriktioner

En særlig type af programmeringsproblemer er af formen

Minimer

$$(2.a) \quad f(x)$$

under bibetingelsen

$$(2.b) \quad G(x) = 0 \quad .$$

Problemer af denne type er studeret allerede i det atten-
de århundrede af den franske matematiker Lagrange. Han vi-
ste, at nødvendige betingelser for, at x er en optimal vek-
tor for problemet (2), kan udledes af Lagrangefunktionen

$$(3) \quad L(x,y) = f(x) - y^t G(x) \quad ,$$

hvor y er en $(m \times 1)$ -vektor af foreløbig ukendte "Lagrange-
multiplikatorer". En nødvendig betingelse for, at \bar{x} er en
optimal vektor, er at der findes entydige multiplikatorer \bar{y} ,
sådan at $L(\bar{x}, \bar{y})$ er et stationært punkt for $L(x,y)$, altså at

$$(4.a) \quad dL(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad ,$$

dvs, in extenso, at både

$$(4.b) \quad df(\bar{x}) - \bar{y}^t dG(\bar{x}) = 0$$

og

$$(4.c) \quad G(\bar{x}) = 0$$

skal være opfyldt.

Antag fx, at målfunktionen er kvadratisk, og at bibetin-
gelserne er lineære i x . Problemet er da

Minimer

$$(5.a) \quad (x^t P x) / 2 + c^t x$$

under bibetingelsen

$$(5.b) \quad Ax - b = 0 \quad ,$$

hvor P er en positiv definit, symmetrisk matrix (for at sikre (streng) konveksitet af målfunktionen). Problemet (5) har Lagrangefunktionen

$$(6) \quad L_p(x, y) = (x^t P x) / 2 + c^t x - y^t (Ax - b) \quad ,$$

og for at \bar{x} kan være optimal, må gradienten i (\bar{x}, \bar{y}) være nul, dvs

$$(7.a) \quad \bar{x}^t P^t + c^t - \bar{y}^t A = 0$$

$$(7.b) \quad A\bar{x} - b = 0 \quad .$$

Sæt nu $z = Px$, sådan at $x = P^{-1}z$. Ligning (7) kan nu skrives på den alternative form

$$(8.a) \quad \bar{y}^t A - \bar{z}^t - c^t = 0 \quad ,$$

$$(8.b) \quad \bar{x} - P^{-1}\bar{z} = 0 \quad , \text{ og}$$

$$(8.c) \quad A\bar{x} - b = 0 \quad .$$

Men ligning (8) kan også opfattes som gradientbetingelsen for den alternative Lagrangefunktion

$$(9) \quad L_d(z, y, x) = -(z^t P^{-1} z)/2 + y^t b - (y^t A - z^t - c^t)x .$$

Forskellen er blot, at i den primale Lagrangefunktion $L_p(x, y)$ er det x , der opfattes som de egentlige variable, og y , der opfattes som en vektor af Lagrange-multiplikatorer. I den duale Lagrangefunktion $L_d(z, y, x)$ er det y og z , der opfattes som egentlige variable, mens x opfattes som en vektor af Lagrange-multiplikatorer. Det bemærkelsesværdige er, at uanset denne ombytning af roller er ligningssystemerne (7) og (8) ækvivalente, dvs at de to Lagrangefunktioner (6) og (9) har et stationært punkt for samme vektor $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Og mens L_p var en konveks funktion, sådan at vektoren minimerer L_p , vil den duale funktion L_d være konkav, sådan at vektoren maksimerer L_d .¹⁾

Det duale problem til (5) er således

Maksimer

$$(10.a) \quad -(z^t P^{-1} z)/2 + y^t b$$

under bibetingelsen

$$(10.b) \quad y^t A - z^t = c^t \quad .$$

Ethvert konvekst minimeringsproblem med lineære restriktioner har et dualt konkavt maksimeringsproblem, jf. fx. Dennis(1959). Ydermere kan det vises, at målfunktionen for de duale problemer antager samme værdi i optimum.

Vi skal i denne rapport kalde to programmeringsproblemer ækvivalente, hvis de har samme mængde af optimale løsninger og samme værdi af målfunktionen i optimum. Hvis de har samme

1. Den duale funktion L_d er den såkaldte Legendre-transformation af den primale funktion L_p . Se fx Dennis(1959)

mængde af optimale løsninger, men forskellige værdier af målfunktionen, skal vi kalde dem parallelforskudte.

Den illustrerede dualitet holder også, selv om restriktionerne har form af uligheder. Vi skal dog ikke her gå dybere ind i teorien om konveks/konkav optimering. I stedet skal vi se lidt grundigere på det særlige tilfælde, hvor såvel målfunktion som restriktioner er lineære i x .

Lineær programmering

Et lineært programmeringsproblem er et problem af typen

$$\begin{array}{ll}
 & \text{minimer} \\
 (11.a) & c^t x \\
 & \text{under bibetingelsen} \\
 (11.b) & Ax \geq b \\
 & \text{hvor} \\
 (11.c) & x \geq 0 \quad .
 \end{array}$$

Hvis mængden af mulige løsninger, defineret ved (11.b og c) ikke er tom, vil den generelt udgøre en konveks kegle ("polytop") i det n -dimensionale vektorrum R^n . Problemet (11) kan generelt have ingen, 1 eller uendeligt mange løsninger. Specielt kan, hvis matricen A opfylder bestemte forudsætninger, mængden af mulige løsninger være kompakt, og i så fald vil den udgøre et konvekst polyeder i R^n . I dette tilfælde kan det lineære programmeringsproblem have enten 1 løsning (svarende til et hjørne i polyederet) eller uendeligt mange løsninger (svarende til en flade eller en

kant).

Bemærk, at bibetingelserne (11) b og c er ækvivalente med

$$(12.a) \quad Ax - s = b \quad \text{og}$$

$$(12.b) \quad x, s \geq 0 \quad .$$

Disse betingelser er igen ækvivalente med

$$(13.a) \quad A^* x^* = b \quad \text{og}$$

$$(13.b) \quad x^* \geq 0 \quad ,$$

hvor $A^* = (A, -I)$ og $x^* = (x, s)$. Når bibetingelserne er angivet på formen (12) eller (13), siges problemet at være på kanonisk form. De ikke-negative variable s kaldes "slack"-variable.

Det ses umiddelbart, at rangen af den udvidede koefficientmatrix A^* højst kan være $2n$. Hvis dette er tilfældet, vil der kun være en mulig løsning til problemet, og denne vil følgelig også være optimal. Normalt vil rangen af den udvidede koefficientmatrix A^* dog være $r < 2n$. I dette tilfælde kan vi danne en basismatrix B med rang r for A^* i form af r uafhængige søjler fra A^* . Den tilsvarende delvektor af x^* kaldes problemets basisvariable og betegnes x_b . De resterende elementer i x -vektoren kaldes sekundære variable og betegnes x_s . Vi har altså

$$(14) \quad A^* x^* = (B \ A_S) \begin{pmatrix} x_b \\ x_S \end{pmatrix} = b .$$

Hvis vi undertrykker de sekundære variable, fremkommer ligningssystemet

$$(15) \quad Bx_b = b$$

der kan løses til $x_b = B^{-1}b$. Basisløsningen svarende til B kan nu defineres ved

$$(16) \quad \begin{pmatrix} x_b \\ x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Der kan normalt udtages et stort antal basismatricer fra A^* , og antallet af basisløsninger er følgelig lige så stort. Basisløsningerne kan identificeres med polytopens hjørnepunkter.²⁾ Der gælder følgende grundsætning:

- (17) Hvis problemet (11) har en mulig hhv. en optimal løsning, eksisterer der en mulig hhv. optimal basisløsning.

Delsætningen for optimale løsninger kan illustreres geometrisk på følgende måde: Hvis en optimal løsning er entydig, er den et hjørnepunkt i polytopen og dermed en basisløsning. Hvis der er uendelig mange optimale løsninger, er løsningsmængden enten polytopens kanter eller flader, og i begge disse tilfælde indeholder løsningsmængden mindst et hjørnepunkt, dvs en basisløsning.

Et lineært programmeringsproblem med n variable og m restriktioner har et dualt problem med m variable og n restriktioner. For et problem på standardform findes det duale problem af

2. To forskellige basisløsninger kan dog svare til samme hjørnepunkt .

	primal	dual
	minimer	maksimer
(18.a)	$c^t x$	$y^t b$
	under	under
(18.b)	$Ax \geq b$	$y \geq 0$
	hvor	hvor
(18.c)	$x \geq 0$	$y^t A \leq c^t$

I det tilfælde, at restriktionerne er en blanding af uligheder og ækvivalenser, og en del af de variable kan variere frit, kan det duale program findes af tabel 1. Dette kræver, at vi opdeler x -vektoren i de positive elementer x_p og de frie elementer x_f . Tilsvarende opdeles restriktionerne i klasserne l (ligninger) og u (uligheder). Koefficientmatricen må følgelig opdeles efter begge kriterier, så

$$A = \begin{pmatrix} A_{lp} & A_{lf} \\ A_{up} & A_{uf} \end{pmatrix} .$$

Vi får

Tabel 1. Dualitetsforhold i lineær programmering

primalt problem	dualt problem
minimer	maksimer
$c^t x$	$y^t b$
under bibetingelsen	under bibetingelsen
$(A_{lp} \ A_{lf}) \begin{pmatrix} x_p \\ x_f \end{pmatrix} = b_l$	y_l fri
$(A_{up} \ A_{uf}) \begin{pmatrix} x_p \\ x_f \end{pmatrix} \geq b_u$	$y_u \geq 0$
$x_p \geq 0$	$(y_l^t \ y_u^t) \begin{pmatrix} A_{lp} \\ A_{up} \end{pmatrix} \leq c_p^t$
x_f fri	$(y_l^t \ y_u^t) \begin{pmatrix} A_{lf} \\ A_{uf} \end{pmatrix} = c_f^t$

Det ses, at jo tættere en restriktion er i primalen, jo friere er variabelen i dualen og vice versa.

Vi skal i det følgende gennemgå en række sætninger om sammenhængen mellem et primalt lineært programmeringsproblem

og dets duale. Vi tager udgangspunkt i formuleringen af problemet på standardform som (18). Der gælder følgende sætning (den svage dualitetssætning):

- (19) Hvis x og y er mulige løsninger til (18),
da vil $c^t x \geq y^t b$.

Af $Ax \geq b$ og $y \geq 0$ fås $y^t Ax \geq y^t b$. Tilsvarende fås $y^t Ax \leq c^t x$. Følgelig er $c^t x \geq y^t b$.

Da $y^t b$ er den mindste mulige værdi af $c^t x$, og $c^t \bar{x}$ omvendt er den største mulige værdi af $y^t b$, fås umiddelbart:

- (20) Hvis \bar{x} og \bar{y} er mulige løsninger til (18), og $c^t \bar{x} = \bar{y}^t b$, da er \bar{x} og \bar{y} optimale løsninger.

Ydermere kan det vises, at

- (21) Hvis et af to duale problemer har et optimum, har det duale problem også et, og $c^t \bar{x} = \bar{y}^t b$. Hvis et af problemerne har et ubegrænset optimum, har det duale problem ingen mulig løsning.

Et bevis er fx givet i Lawler(1976).

De optimale løsninger vil være ortogonale i følgende forstand:

- (22) Hvis \bar{x} og \bar{y} er mulige løsninger til (18), da er \bar{x} og \bar{y} optimale, hvis og kun hvis
- $$(\bar{y}^t A - c^t) \bar{x} = \bar{y}^t (A \bar{x} - b) = 0 .$$

Hvis $(\bar{y}^t A - c^t) \bar{x} = 0$ og $\bar{y}^t (A \bar{x} - b) = 0$, er $\bar{y}^t A \bar{x} = c^t \bar{x} = \bar{y}^t b$. Hvis \bar{x} og \bar{y} er mulige, følger af (21) at \bar{x} og \bar{y} er optimale. Omvendt, hvis \bar{x} og \bar{y} er optimale, er $c^t \bar{x} = \bar{y}^t b = \bar{y}^t A \bar{x}$, jf (21). Ortogonaliteten følger umiddelbart..

Bemærk, at da både \bar{x} og \bar{y} er ikke-negative, vil skalarproduktet (20) kun kunne være nul, hvis samtlige indgående bidrag er nul, dvs når

- (23.a) $\bar{x}_j > 0 \Rightarrow \bar{y}^t a_j = c_j$,
 (23.b) $\bar{y}^t a_j > c_j \Rightarrow \bar{x}_j = 0$,
 (23.c) $a_i^t \bar{x} > b \Rightarrow \bar{y}_i = 0$,

$$(23.d) \quad \bar{y}_i > 0 \quad \Rightarrow \quad a_i^t \bar{x} = b_i \quad .$$

idet a_i og a_j er hhv. den i 'te række og den j 'te søjle i A -matricen.

De komplementære slaphedsbetingelser

Ortogonalitetsbetingelserne er et særligt tilfælde af det såkaldte princip om komplementær slaphed ("complementary slackness"). Det er i almindelighed nødvendigt at indføre "slack"-variable, når der minimeres eller maksimeres under restriktioner om ikke-negativitet af de uafhængige variable. Antag fx at vi skal minimere en konveks, skalar funktion $f(x)$ under bibetingelsen $x \geq 0$. Denne situation er illustreret i figur 1. Der er som vist to muligheder for minimum:

$$\begin{aligned} \text{Enten er } & df(x_0) = 0 \quad \text{og} \quad x_0 > 0, \\ \text{eller} & df(x_0) > 0 \quad \text{og} \quad x_0 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Denne betingelse kan formuleres på vektorform som dobbeltbetingelsen

$$(24.a) \quad df(x_0) - s = 0 \quad , \quad \text{og}$$

$$(24.b) \quad s^t x_0 = 0 \quad , \quad s, x_0 \geq 0 \quad .$$

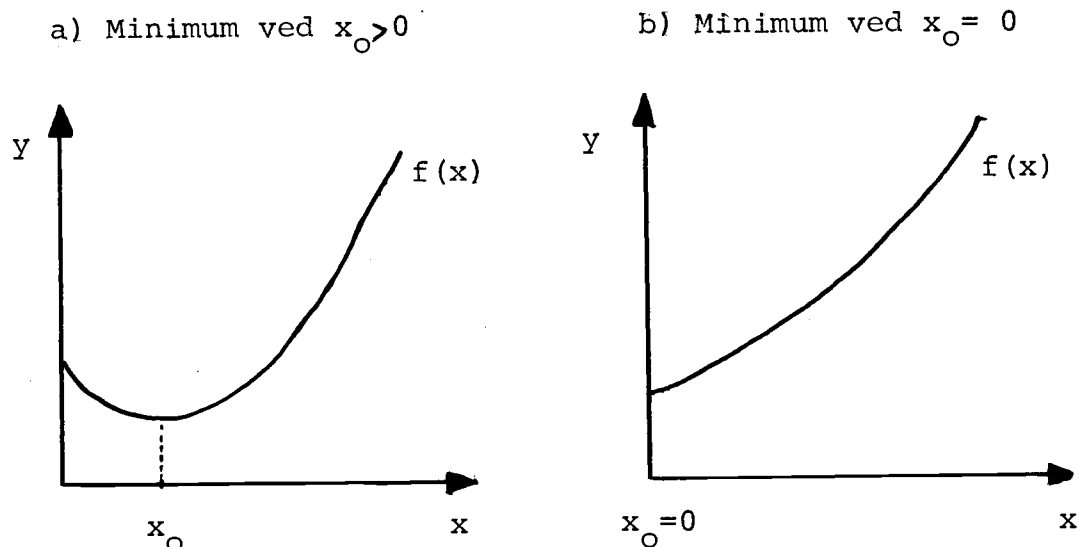
Bibetingelsen b sikrer os, at enten er $s=0$, og så har vi det første tilfælde i figur 1 (hvor $df(x_0)=0, x_0>0$), eller også er $s>0$ og så har vi det andet tilfælde, hvor $x_0=0$.³⁾ Hvis vi i de lineære programmer (18) definerer positive "slack"-variable $s_1 = Ax - b$ og $s_2^t = y^t A - c$ og opskriver problemerne på kanonisk form, ses at orthogonalitetsbetingelserne i lineær programmering er en variant af det generelle princip om komplementær "slackness":

Vi får de duale Lagrangefunktioner

$$(25.a) \quad L_p(x, y, s_1) = c^t x - y^t (Ax - s_1 - b) \quad \text{og}$$

3. Specielt kan vi dog have $s = x_0 = 0$.

Figur 1. Princippet om komplementær slaphed



$$(25.b) \quad L_d(y, s_2, x) = y^t b - (y^t A - s_2^t - c^t)x \quad .$$

De to funktioner L_p og L_d skal hhv. minimeres for $x, s_1 \geq 0$ og maksimeres for $y, s_2 \geq 0$.

Dette kan vises at lede til Lagrangeligningerne

$$(26.a) \quad Ax - s_1 - b = 0 \quad (\text{primale restriktioner}),$$

$$(26.b) \quad c^t - y^t A - s_2^t = 0 \quad (\text{duale restriktioner}) \text{ og}$$

$$(26.c) \quad y^t s_1 = 0, \quad s_2^t x = 0 \quad (\text{"slackness"}), \text{ hvor}$$

$$(26.d) \quad x, y, s_1, s_2 \geq 0 \quad .$$

En vektor $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}_1, \bar{s}_2)$, der opfylder (26), vil være optimal for det duale problem (18).

APPENDIX 2. OM SUMMATIONS- OG FORDELINGSMATRICER

Summationsmatricer

Ved en summationsmatrix forstås i det følgende en matrix, der ved multiplikation med en vektor g ($ax1$) summerer visse elementer i g , således at der fremkommer en vektor g^* ($nx1$), hvor $n < a$. Summationsmatricen G kan fx defineres ved, at den har begge egenskaberne

- (1) Dens elementer er 0 eller 1
- (2) $i^t G = i^t$, hvor i er passende dimensionerede vektorer af ettaller .

I det følgende skal vi af overskuelighedshensyn antage, at elementerne i den detaljerede vektor g er sorteret således, at de elementer, der summeres ved multiplikation med G , kommer i sammenhængende "klumper". Dette betyder selvfølgelig ikke noget tab af generalitet.

Et eksempel på en summationsmatrix er

$$(3) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ved multiplikationen

$$(4) \quad g^* = Gg$$

vil matricen G summere de fem elementer i g -vektoren, så

$$g_1^* = g_1 + g_2 \quad \text{og} \quad g_2^* = g_1 + g_2 + g_3 .$$

Hvis vi tager søjlesummer i G fås en vektor v , der for hvert element i den aggregerede vektor g^* viser, hvor mange elementer fra den oprindelige vektor g , det består af:

$$(5) \quad Gi = v \quad .$$

Vektoren v kaldes også for valensvektoren, og dens element nummer j kaldes valensen af g_j^* .

En karakteristisk egenskab for summationsmatricer er, at for en vilkårlig vektor g er

$$(6) \quad G \hat{g} G^t = \hat{g}^* ,$$

dvs at en (axa) diagonalmatrix aggregeres til en (nxn) diagonalmatrix. Som særtilfælde har (6), at

$$(7) \quad GG^t = \hat{v} .$$

Matricen GG^t er følgelig regulær. Derimod kan (axa) -matricen G^tG selvfølgelig ikke være regulær. Den har det karakteristiske blokdiagonale udseende

$$(8) \quad G^tG = \begin{pmatrix} U_1 & & & & \\ & U_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & U_{n-1} & \\ & & & & U_n \end{pmatrix} ,$$

hvor U_j ($j=1, \dots, n$) er en matrix af lutter ettaller af dimensionen $(v_j \times v_j)$, dvs at U_j kan skrives som det ydre produkt ii^t af en $(v_j \times 1)$ enhedsvektor.

Fordelingsmatricer

Til enhver summationsmatrix, der opfylder (4), kan vi definere en (axn) "fordelingsmatrix" W_g , der "regner tilbage igen", dvs opfylder

$$(9) \quad g = W_g g^* .$$

Bemærk, at mens summationsmatricen G var uafhængig af værdierne af elementerne i g -vektoren, kan dette ikke gælde fordelingsmatricen W_g (derfor fodtegnet). Ved inspektion ses, at W_g kan skrives

$$(10) \quad W_g = \hat{g}G^t(G\hat{g}G^t)^{-1} \\ = \hat{w}G^t$$

hvor w er en (axi)-vektor, der for hvert element g_{ij} i den detaljerede vektor viser den vægt, hvormed elementet indgår i sit aggregerede element g_j^* :

$$(11) \quad w_{ij} = g_{ij}/g_j^*$$

Matricer af typen W_g optræder meget hyppigt i praktiske sammenhænge. En fordelingsmatrix kan opfattes som en operator, der "spredt aggregerede elementer ud" på underkomponenter. Deraf navnet en fordelingsmatrix. Vi skal undersøge den nærmere.

For det første har vi formler for række- og søjlesummer:

$$(12) \quad W_g i = \hat{w}G^t i = w \quad , \text{ jf. (2),}$$

og

$$(13) \quad i^t W_g = wG^t = i^t$$

Desuden gælder det intuitivt indlysende, at

$$(14) \quad G W_g = G\hat{g}G^t(G\hat{g}G^t)^{-1} \\ = I$$

Derimod vil (axa)-matricen $W_g G$ selvfølgelig ikke være en enhedsmatrix. Da den kan skrives

$$(15) \quad W_g G = \hat{w}G^t G$$

ses, at $W_g G$ vil have samme dimension og samme nul-elementer som $G^t G$ i (8), men i stedet for ettalsmatricerne U_j langs diagonalen vil $W_g G$ have matricer W_j , der indeholder v_j identiske søjler med de v_j vægte for gruppe j :

$$(16) \quad W_{gj} = \hat{w}_j U_j = w_j i^t$$

da $U_j = i i^t$.

Proportionalitetsbetingelsen

Selv om matricen $W_g G$ ikke er en enhedsmatrix, har den dog en egenskab i den retning. Der gælder nemlig at

$$\begin{aligned}
 (17) \quad W_g G g &= \hat{g} G^t (G \hat{g} G^t)^{-1} G g \\
 &= \hat{g} G^t (\hat{g}^*)^{-1} g^* \\
 &= \hat{g} G^t i \\
 &= g
 \end{aligned}$$

Dette giver os umiddelbart det nyttige resultat, at hvis x er en vilkårlig vektor, for hvilken $W_x = W_g$, da vil $W_g G x = x$. Da vi i praksis ofte kommer ud for at skulle finde vektorer af denne type, skal vi med lidt besvær vise, at sammenhængen også gælder den modsatte vej. Først bemærker vi, at

$$(18) \quad W_g G x = x$$

er ensbetydende med, at

$$(19) \quad (I - \hat{W} G^t G) x = 0$$

, jf. (15).

Lad os nu betragte den j 'te diagonalblok i koefficientmatricen i (19). Den vil kunne skrives

$$(20) \quad (I - w_j i^t) \quad , \text{ jf. (16).}$$

Den kan derfor skrives

$$(21) \quad \begin{pmatrix} (1-w_{1j}) & -w_{1j} & -w_{1j} & \dots & -w_{1j} \\ -w_{2j} & (1-w_{2j}) & -w_{2j} & \dots & -w_{2j} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ -w_{vj} & -w_{vj} & -w_{vj} & \dots & (1-w_{vj}) \end{pmatrix} .$$

Da summen over i af w_{ij} pr definition er 1, vil søjlesummerne i (21) være nul. Da der ellers ikke er lineære bånd på w_{ij} konkluderer vi, at rangen af (20) må være $v_j - 1$. Rangen af den samlede koefficientmatrix i (19) vil følgelig være $(a-n)$, dvs at (19) lægger $(a-n)$ lineære bånd på elementerne i x . Ligningen for x_{ij} ses af (21) at være

$$(22) \quad x_{ij} = w_{ij} \sum_h x_{hj} \quad , \quad \text{ensbetydende med at}$$

$$(23) \quad x_{ij}/x_j^* = w_{ij} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon_j^* \quad .$$

Dette er ensbetydende med, at $W_x = W_g$: For at en vektor x skal opfylde (19), må de elementer, der summeres i samme blok, variere proportionalt.

Identitetsbetingelsen

Et andet tilfælde, der fx optræder hyppigt i forbindelse med teorien om aggregering af input-output tabeller, er det duale tilfælde, hvor en $(ax1)$ -vektor x skal opfylde

$$(24.a) \quad x^t W_g G = x^t$$

eller

$$(24.b) \quad x^t (I - \hat{W} G^t G) = 0 \quad .$$

Af (21) ses, at ligningen for x_{ij} bliver

$$(25) \quad x_{ij} = \sum_h w_{hj} x_{hj} \quad , \quad i = 1, \dots, v_j \quad .$$

Denne ligning vil kun holde, såfremt alle de elementer i x , der lægges sammen i gruppe j , er identiske. Dette kan alternativt udtrykkes sådan, at x skal kunne skrives som $G^t y$, hvor y er en $(nx1)$ -vektor, der "blæses op" til en $(ax1)$ -vektor ved multiplikationen med G^t (herved "duplikeres" simpelt hen et passende antal elementer). Generelt gælder, at når og kun når en (mxa) -matrix X kan skrives $X=YG$, hvor Y er en (mxn) -matrix, da vil

$$(26) \quad \begin{aligned} X W_g G &= Y G \hat{G} G^t (G \hat{G} G^t)^{-1} G \\ &= Y G \\ &= X \end{aligned}$$

Mere verbalt kan resultatet udtrykkes sådan, at ligningen $X W_g G = X$ kun vil være opfyldt, når de søjler i X , der summeres ved $X G^t$, er identiske. Hvis de er identiske, kan X skrives YG .

En digression om matricen (I-WG)

De duale betingelser (23) og (25) kan også udledes algebraisk. Selv om denne metode virker mindre gennemskuelig end den ovenfor valgte, skal den alligevel kort skitseres af hensyn til eventuelle videregående overvejelser. Den ikke specielt interesserede læser kan roligt springe videre til næste afsnit.

En algebraisk udledning af (23) og (25) kræver, at vi danner basismatricer for G og W_g (i resten af dette afsnit udelader vi indeks g af overskuelighedshensyn). Vi omsorterer først g -vektoren og G -matricens søjler sådan, at de n første elementer stammer fra hver sit aggregat g_j^* , $j=1..n$. Disse n elementer kaldes også repræsentanter for grupperne $j=1..n$, og vi skal betegne n -vektoren af repræsentanter g_t , mens den komplementære $(a-n)$ -vektor betegnes g_c .

Ved at nummerere de n repræsentanter hensigtsmæssigt opnår vi, at summationsmatricen kan skrives

$$G = \begin{pmatrix} G_t & G_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & G_c \end{pmatrix} .$$

Tilsvarende kan fordelingsmatricen W skrives

$$W = \begin{pmatrix} W_t \\ W_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_t^t & G_c^t \\ \hat{w} & G_c^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}_t & G_c^t \\ \hat{w}_c & G_c^t \end{pmatrix} .$$

Da $GW=I$ fås, at

$$G_c W_c = I - G_t W_t = I - \hat{w}_t .$$

Matricen $(I-WG)$ har som nævnt ovenfor ikke fuld rang, idet der er n overflødige rækker og søjler - nemlig en række og søjle for hver gruppe $j=1..n$. Men det vil jo netop sige, at rækkerne og søjlerne for vores repræsentanter kan undværes, sådan at matricen $(I-W_c G_c)$ har fuld rang.

Det kan endvidere vises - fx ved hjælp af potensrækker - at

$$(I-W_c G_c)^{-1} = (I + W_c \hat{w}_t^{-1} G_c)$$

(Det kan let eftervises, at produktet af de to matricer er en enhedsmatrix). Med dette resultat i baghånden er det trivielt at eftervise (23) og (25) algebraisk, men vi skal ikke bruge plads på det her.

Summationsmatricer og orienterede grafer

Et par af ens dimensionerede summationsmatricer \bar{G}_1 og \bar{G}_2 vil altid definere to orienterede grafer ved de udvidede incidensmatricer

$$(27) \quad \bar{A}_1 = \bar{G}_1 - \bar{G}_2$$

og

$$(28) \quad \bar{A}_2 = \bar{G}_2 - \bar{G}_1 = -\bar{A}_1 \quad .$$

Det ses, at \bar{A}_2 repræsenterer den omvendte graf af \bar{A}_1 . Vi skal ikke beskæftige os med incidensmatricer her, idet de er beskrevet i kapitel 2. Til gengæld skal vi undersøge, hvad den grafteoretiske procedure med at vælge et referencepunkt og stryge dets rækker i \bar{G}_1 og \bar{G}_2 betyder for de reducerede summationsmatricers egenskaber. Vi kan som en tommelfingerregel regne med, at de formler fra afsnit 1 og 2, der har dimensionen n , stadig vil holde på nær den slettede ligning for referencepunktet. Derimod vil de formler, der har kantdimensionen a , ændre deres indhold.

Vi skal i det følgende kun undersøge matricen G_1 , der her opfattes som den reducerede udmatrix for grafen i (27). De resterende tilfælde fås let ved benyttelse af retningsduale begreber.

Den reducerede ud-matrix opfylder

$$(29) \quad i^t G_1 = (i^t, 0) \quad ,$$

hvor nullerne er for de pile, der går ud fra referencepunktet (de referenceincidente pile), og

$$(30) \quad G_1 i = v_u \quad ,$$

hvor v_u er vektoren af udgangsværdier for de $(n-1)$ ikke-

datum punkter.

Der vil stadig gælde, at punktmatrixen $GG^t = \hat{v}_u$ og dermed er regulær. Derimod vil kantmatrixen G^tG have et lidt andet udseende, idet diagonalblokken for referencepunktet ikke længere vil være en ettalsmatrix, jf. (8), men derimod en nulmatrix.

De fordelingmatricer, der kan knyttes til en reduceret summationsmatrix, vil være identiske med almindelige fordelingsmatricer, blot med en søjle mindre. For de reducerede matricer gælder stadig, at $GW=I$, men den kantdimensionerede matrix WG vil ligesom matrixen G^tG ovenfor have nuller i referencepunktets diagonalblok.

Koefficientmatrixen $(I-WG)$, jf. (19), vil følgelig have en enhedsmatrix som diagonalblok for referencepunktet, mens de øvrige punkters diagonalblokke fortsat vil have udseendet (16). Rangen af matrixen vil derfor være $m=a-n+1$. Men hvad betyder dette for vektoren x , der opfylder $x=W_g Gx$? Simpelt hen, at de elementer i x , der er incidente til referencepunktet, må være nul. Dette betyder, at vi i stedet kan finde x , så

$$(31) \quad x = W_g Gx + l,$$

hvor de referenceincidente elementer i l kan vælges frit, resten er nul. Proportionalitetsbetingelsen vil fortsat gælde de x -elementer, der ikke er referenceincidente. Det duale tilfælde (24) kan modificeres tilsvarende.

Omfordelingsmatricer

To summationsmatricer \bar{G}_1 og \bar{G}_2 , der har samme kantdimension, men forskellig punktdimension, kan siges at definere en "todelt graf" ("bipartite graph", jf fx Lawler(1976)). Vi skal ikke her gå ned i den veludviklede teori om todelte grafer, men vi skal notere, at de to matricer kan bruges til at definere to retningsduale "omfordelingsmatricer": Lad $g_1^* = \bar{G}_1 g$ og $g_2^* = \bar{G}_2 g$. Omfordelingsmatricerne kan nu defineres ved

$$(32) \quad W_{12} = G_1 W_{2g}$$

og

$$(33) \quad W_{21} = G_2 W_{1g} \quad .$$

Da gælder, at

$$(34) \quad g_1^* = W_{12} g_2^* \quad (\text{og omvendt}).$$

Ligningen (34) kan fortolkes således, at vi først fordeler g_2^* ud på detaljerede elementer ved $W_{2g} g_2^* = g$, og derefter summerer vi g med den alternative summationsnøgle G_2 . Sådanne omfordelingsmatricer er uhyre velkendte i empirisk økonomi, idet de ofte anvendes i forbindelse med omklassifikationer af forskellige nøglestørrelser. Et eksempel kan fx. være omregning af en varefordelt importvektor til en landefordelt eller erhvervsfordelt importvektor.

Omfordelinger og input-output

Den grundliggende summation i input-output modeller er inputsummationen

$$(35) \quad t^* = \bar{G}_i q \quad , \text{ jf (5.31) } .$$

Ved at sammenholde (34) med (5.36) ses, at de normale input-output ligninger netop kan opfattes som en omfordeling af t -vektorens elementer: Først fordeles gennemstrømningerne på kanter ved hjælp af inputkoefficienterne

$$(36) \quad q = W_{iq} t + q_u \quad ,$$

og derefter summeres kanternes strømme med den alternative summationsnøgle G_u :

$$(37) \quad G_u q = G_u W_{iq} t + G_u q_u = t \quad , \text{ jf (5.31) } .$$

hvoraf

$$(38) \quad (I - G_u W_{iq})t = t_u \quad , 1)$$

Input-output matricen er således en omfordelingsmatrix, jf forrige afsnit. Det specielle ved input-output matricen er imidlertid, at begyndelses- og slutvektoren er den samme, nemlig t .

Hvis vi indsætter $G_i W_{iq} = I$ samt definitionen af incidensmatricen A (fx (27)) i (38), fås input-output systemligningen

$$(39) \quad -A W_{iq} t = t_u \quad , \text{ jf (5.39).}$$

Vi har således givet en simpel, men dog dybtgående fortolkning af input-output matricen.

1. Af kapitel 5, note 12 fås, at $t_u = A q_u$. Men da alle positive udstørninger går ind i referencepunktet, hvis række i indmatricen som bekendt er slettet, er $A q_u = G_u q_u = t_u$.

LITTERATUR

- Allen, R.G.D. (1968) : "Macroeconomic theory - a mathematical treatment". Macmillan
- Ancot, J.P. (ed, 1984): "Analysing the structure of econometric models". Martinus Nijhoff, den Haag
- Baumol, W.J. (1965): "Economic theory and operations analysis". Prentice-Hall
- Berge, C. (1958) : "Theorie des graphes et ses applications". Dunod, Paris. Engelsk oversættelse Wiley (1962)
- Bjørke, Ø. (1981) : "An operational generalization of the network approach". I Franksen og Bjørke (red, 1981).
- Branin, F.H., jr. (1977) : "The network concept as a unifying principle in engineering and the physical sciences". I Branin og Huseyin (1977).
- Branin, F.H. Huseyin, K. (eds., 1977) : "Problem analysis in science and engineering". Academic Press, New York
- Bryant, P.R. (1969): "Graph theory applied to electrical networks". I Harary (ed) (1969).
- Christophides, Nicos (1975): "Graph theory - an algorithmic approach". Academic Press
- Danmarks Statistik (1983) : "Nationalregnskabsstatistik 1966-1981". København.
- Defourny, J. og Thorbecke, E. (1984): "Structural path analysis and multiplier decomposition within a social accounting matrix framework". Economic Journal 94 (marts 1984), pp 111-136
- Dennis, J.B. (1959): "Mathematical programming and electrical networks". Wiley
- Dixhoorn, J.J. Van Evans, F.J. (Eds, 1974) : "Physical structure in systems theory - network approaches to engineering and economics". Academic Press, London
- Dorfman, R., P. Samuelson og R. Solow (1958): "Linear programming and economic analysis". McGraw-Hill, N.Y.

- Ellis, J.B. (1964) : "Systems engineering analysis of soft systems". Proceedings E.I.C. Canadian indust. research Conf., Ottawa
- Ellis, J.B., Koenig, H. Milstein, D.N. (1964) : "Physical systems analysis of socio-economic situations". Papir forelagt Joint national meeting of the Operational research society of America, and the Institute of management Science 1964, Minneapolis, Minnesota
- Ford, L.R. Fulkerson, D.R. (1962) : "Flows in networks". Princeton University Press, New Jersey
- Fulkerson, D.R. (1961): "An out-of-kilter method for minimal cost flow problems". SIAM J. Appl. Math. 9, pp18-27.
- Franksen, O.I. (1969) : "Mathematical programming in economics by physical analogies" I-III. Simulation no 6, june, pp 297-314, no 1, july, pp 25-42, no 2, aug., pp 63-87
- Franksen, O.I. (1978) : "An operational formulation of the electric network problem", i Franksen Bjørke (red, 1978).
- Franksen, O.I. (1978b) : "An electric analogy of the economic transportation problem", i Franksen Bjørke (red, 1978).
- Franksen, O.I. Bjørke, Ø. (1978) : "System structures in engineering - economic design and production". Tapir
- Franksen, O.I. Bjørke, Ø. (1981) : "Structures and operations in engineering and management systems". Tapir
- Franksen, O.I., Falster, P. Evans, F.J. (1979) : "Qualitative aspects of large scale systems". Springer Verlag, Berlin
- Gale, D. (1960): "The theory of linear economic models". McGraw-Hill, New York
- Garbely, M. og Gilli, M. (1984): "Two approaches in reading model interdependencies". I Ancot (ed, 1984).
- Hadley, G. M.C. Kemp (1972): "Finite mathematics in business and economics". North Holland.

- Harary, F., Norman, R. Cartwright, D. (1965) : "Structural models - an introduction to the theory of directed graphs". Wiley, New York
- Harary, F. (ed., 1967): "Graph theory and theoretical physics". Academic Press
- Harary, F. (1969): "Graph theory". Addison-Wesley
- Jacobsen, M. og Keiding, K. (1982): "Markovkæder". Institut for Matematisk Statistik, Københavns Universitet.
- Kemeny, J.G. Snell, J.L. (1962) : "Mathematical models in the social sciences". Ginn, New York
- Kesavan, H.K. Roe, P.H. (1963) : "Networks and systems". Univ. of Waterloo Press, Ontario
- Koenig, H.E. Blackwell, W.A. (1961) : "Electromechanical system theory". McGraw-Hill, New York
- Koenig, H.E. (1964): "Mathematical models of social economic systems - an example". Proceedings, 1964 systems science conf. of IEEE, Philadelphia
- Koenig, H., E., Tokao, Y. Kesavan, H.K. (1964) : "Analysis of discrete physical systems". McGraw-Hill, New York
- Koenig, H.E. Frame, J.S. (1964) : "Applications of matrices to systems analysis". Matrix functions and applications 3, IEEE spectrum, may 1964
- Koopmans, T.C. (ed., 1951) : "Activity analysis of production and allocation". Wiley, New York
- Lange, O. (1970) : "Introduction to economic cybernetics". Pergamon, Warszawa
- Lawler, E.L. (1976): "Combinatorial optimization - Networks and matroids". Holt, Rinehart and Winston
- Leontief, W. (1941): "The structure of the american economy 1919-29". Harvard University press.
- Lindberg, Anita (1984): "Forudsigelsesfejl på ADAMs input-output mængdemodel" (internt arbejdsrapport af 22. maj). Modelgruppen, Danmarks Statistik.
- Minty, G.J. (1960): "Monotone Networks". Proc. Royal Soc., London, Ser. A.
- Minty, G.J. (1966): "On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming". J. Math. and Mechanics 15, pp485-520.

- Nielsen, Frank et al (1972): "Forslag til en dansk grafteoretisk terminologi. Matematisk Institut, DTH.
- Nielsen, Frank(1981): "Grafer og netværk". Matematisk Institut, DTH, lyngby.
- Olsen, J.A.(1981) : "Aggregeringsproblemer i empirisk modelarbejde". Økonomisk Institut, K.U. (stor opgave 1981:2)
- Olsen, J.A.(1984): "Adaptation of detailed input-output information: Restructuring and aggregation". Modelgruppen, Danmarks Statistik (kommende i Rev. income and Wealth).
- Olsen, J.A.(1985): "Enkeltligningsfejl i input-output modeller". (internt arbejdsrapport af 1. februar). Modelgruppen, Danmarks Statistik.
- Ore, O.(1962) : "Theory of graphs". Amer. Math. Soc. Colloquium publs., Vol 38
- Ore, O.(1963) : "Graphs and their uses". Random House and the L.W.Singer co., New York
- Petersen, J(1891): "Die theorie der regulären graphs". Acta Mathematica, vol 15, pp 193-200
- Prager, W.(1965): "Problems of network flow". J. Appl. Math. and Physics (ZAMP) 16, pp185-190. Basel.
- Rossier, E.(1971): "Economie structurale". Economica, Paris
- Roth, J.P.(1955) : "An application of algebraic topology to numerical analysis: On the existence of a solution to the network problem". Proc. Nat. Acad, Sci., 41, pp598-521
- Timothy, L.K. Bona, B.E.(1968) : "State space analysis. An introduction". McGraw-Hill, New York

INDEKS

Adfærdsrelationer, i økonomisk model	66
Admittans	120
Afstand	24
Afstandsmatricen	28
Aktivt element	115
Basis	33
Basiskreds (se fundamentalkreds)	41
Basisløsning, for lineært program	151
Basismatrix	36
Basisvariable, i programmeringsproblem	150
Bånd	21
Cirkulation, i netværk	62, 64
Co-træ	40
Cyklomatisk tal (se kredsranng)	42
Datum (se Referencepunkt)	35
Datumvejsmatrix	44
Delgraf	22
Delgraf, udspændende	22
Dual tvangsbinding	69
Duale kilder (se spændingskilder)	79
Eksterne kilder, i netværk	79
Elementoperation	25
Element, aktivt	115
Element, Kronsk	117
Element, passivt	115
Energikilder (se Værdikilder)	78
Fordelingsmatrix	157
Forklaringsskelet, for ligningssystem	93
Fundamentale metoder, til netværksproblem	123
Fundamentalkreds	41
Fundamentalkredsmetoden	123
Fundamentalmængde	34
Fundamentalsnitsætmetoden	124
F-kreds (se fundamentalkreds)	41
F-snitsæt (se Snitsæt, fundamentalt)	46
Graf, acyklisk	87
Graf, ensrettet	32
Graf, kondenseret	87
Graf, kondenseret acyklisk	88
Graf, omvendt	20
Graf, planar	125
Graf, sammenhængende	32
Graf, stærk	32, 33
Graf, symmetrisk	21
Hamilton-kreds	31
Identitetsbetingelsen	160
Identitet, i økonomisk model	66
Impedans	120
Incidensmatrix, udvidet	34
Incidensmatrix, (reduceret)	35
Indgangsværdens	22

Indmatricen	36
Indre impedans , af energikilde	117
Indre punkter (i netværk)	61
Indstrømning, i netværk	61
Indvægt, for netværk	53
Ind-center	87
Ind-periferi	87
Ind-radius	87
Ind-tal	85
Ind-træ	38
Interne kilder, i netværk	79
I-o systemmatrix, lukket	97
I-o systemmatrix, samlet	95
Kanonisk form, af lineært program	150
Kanoniske adfærdsligninger, for i-o system	112
Kant	21
Kant, multipel	115
Kapacitetsafstand	55
Karakteristik, for kant	72
Kardinalitet (af tur)	23
Kilde	21
Klassedelingsmetoder, til netværksproblem	123
Knudepunktsadmittansmatricen	122
Knudepunktsbalancer	134
Knudepunktsmetoden	120
Knudepunktsmetode, klassisk	122
Knudepunktsstrømkilder	80, 122
Komplementær slaphed	154
Komponent, af graf	33
Komponent, ensrettet	33
Komponent, stærk	33
Komponent, svag (se Sammenhængsk.)	33
Kondensator	130
Kondensering (af graf)	87
Kontrabasis	34
Kontrafundamental mængde	34
Korde	40
Kreds	24
Kredsbalancer	136
Kredsimpedansmatricen	123
Kredsmatrix (for en graf)	43
Kredsmatrix, fundamental	42
Kredsmetoden, se Maskemetoden	122
Kredsrang	42
Kredsrum (for en graf)	43
Kredsspændingskilder	80, 123
Kreds, eksploderende	57
Kreds, fundamental	41
Kronsk element	117
Krydsimpedanser	128
Krydspriselasticiteter	128
Lagrangefunktion	146
Lagrange-multiplikator	146
Ligevægtsbetingelser, for kanter	72
Logisk ordning (af graf)	84
Markov-kæde	59
Maskeimpedansmatricen (se Kredsimp.)	123
Maskemetoden	122
Maske-spændingskilder (se Kredssp.)	123
Max-flow problemet	67
Modstand (Ohmsk)	119

Mulig vektor, i programmeringsproblem	144
nabo	20
Nabomatricen	20
Netværk	51
Netværksproblem, elektrisk	114
Netværk, additivt	56
Netværk, kapacitivt	54
Netværk, lukket	61
Netværk, multiplikativt	57
Netværk, stokastisk	58
Netværk, åbent	60
Ohms lov	120
Omfordelingsmatrix	163
Omkostningsnetværk (se Netværk, additivt)	56
Omvejsmatricen	31
Omverden, for netværk (se Universelt punkt)	62
Orienteret graf	17
Ortogonalitet af løsninger til lineært program	153
Out-of-kilter metoden	71
Overføringssegenskaber, af kanter	66
Overføringsfunktion, for kant (karakteristik) ..	72
Overkrydsningseffekter	128
Passivt element	115
PERT-netværk	57
Primale kilder (se strømklider)	79
Primal-dual kobling	76
Programmeringsproblem	144
Programmeringsproblemer, parallelforskudte	149
Programmeringsproblemer, ækvivalente	148
Programmeringsproblem, dualt	151
Programmeringsproblem, lineært	149
Proportionalitetsbetingelsen	159
Reducerende operation	26
Referencepunkt	35
Regionsmetoden	125
Rejsende handelsmands problem	31
Repræsentant	111, 161
Retningsdualitet	21
Sammenhængskomponent	33
Sammenhæng, typer af	32
Sekundære variable, i programmeringsproblem ...	150
Signalgraf (se Netværk, multiplikativt)	57
Skelet (se træ, udspændende)	38
Skov, i en graf	40
Sløjfe	22
Snitrum (for en graf)	47
Snitsæt	45
Snitsætmatrix (for en graf)	48
Snitsætmatrix, fundamental	47
Snitsæt, fundamentalt	46
Spole	130
Spændingsklider, i netværk	79
Spændingskilde, ideel	115
Spændingsrum (se Snitrum)	47, 69
Spændingsvariabel, i netværk	68
Standardform, af lineært program	151
Stokastisk netværk	58
Strømkilder, i netværk	79
Strømkilde, ideel	115
Strømning, i netværk	61
Strømrums (se Kredsrums)	43, 64

Strøm, i kant	61
Stykliste, for netværk	52
Størrelse, af strømning	61
Summationsmatrix	156
Svag dualitetssætning i lineær programmering ..	153
terminal	19
Tilgængelig mængde	24
Tilgængelighed	24
Tilgængelighedsmatricen	27
Tilstandsfunktioner	119
Transient, i dynamisk netværksmodel	130
Transportnetværk (se Netværk, kapacitivt)	54
Transportproblem, Koopmans	67
Træ	37
Trægren	40
Trækomplement (se co-træ)	40
Træ, ensrettet (se ud-træ)	38
Træ, udspændende	38
Tur	22
Tur, ensrettet	23
Tur, lukket	24
Tur, åben	24
Tvangsbinding, af spændinger	69
Tvangsbinding, af strømme	66
Udcenter	87
Ude-af-ligevægt metoden	71
Udgangsvælens	22
Udmatricen	36
Udradius	87
Udstømning, i netværk	61
Udvægt, for netværk	53
Ud-periferi	87
Ud-tal	85
Ud-træ	38
Ud-træ, for input output system	111
Uligevægt, for kant	73
Uligevægt, for (p,q)-vektor	73
Universelt punkt, for strømningensnetværk	62
Valens	156
Valensvektor	156
Vej	23
Vej, elementær	24
Virtuelle forskydninger	119
Vægt (i netværk)	51
Vægtmatrix, for netværk	52
Værdikilder, i netværk	78
Ydre punkter(i netværk)	61
"Min cost" cirkulationsproblem	66, 68